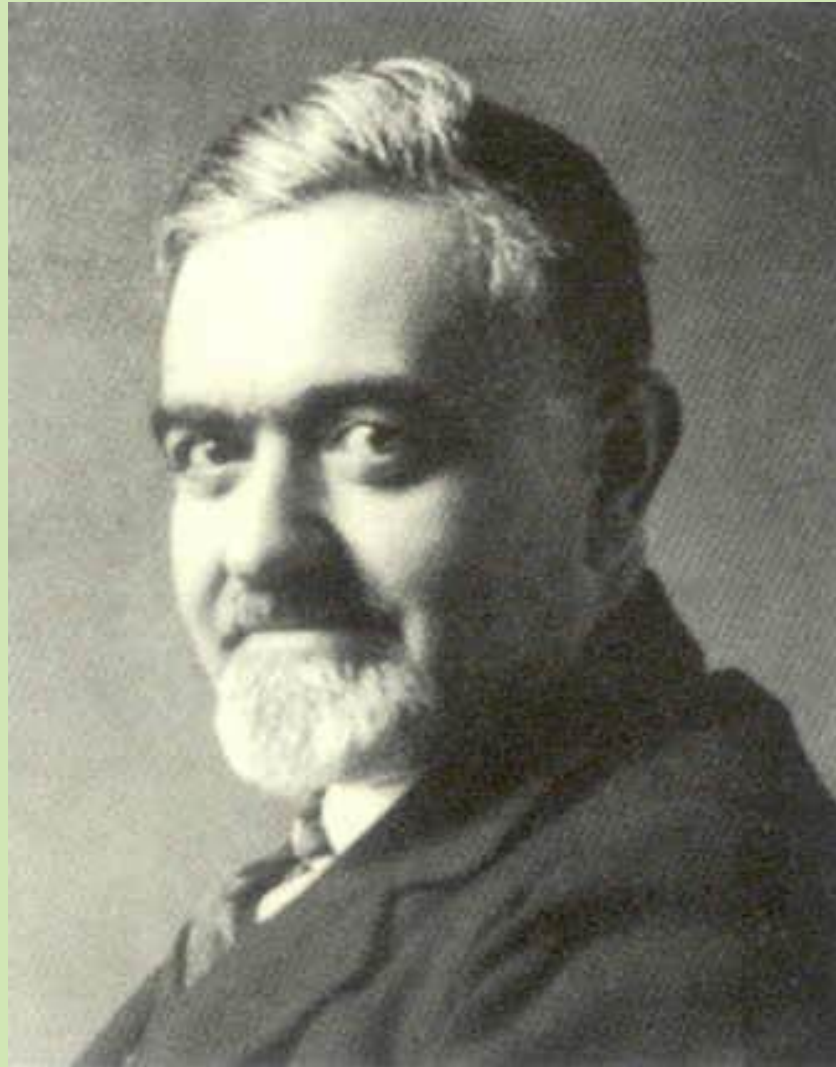


# Vitali senza cattedra

Modena, 8 settembre 2025

Luigi Pepe, professore emerito, Università di Ferrara



Giuseppe Vitali (1875-1932)

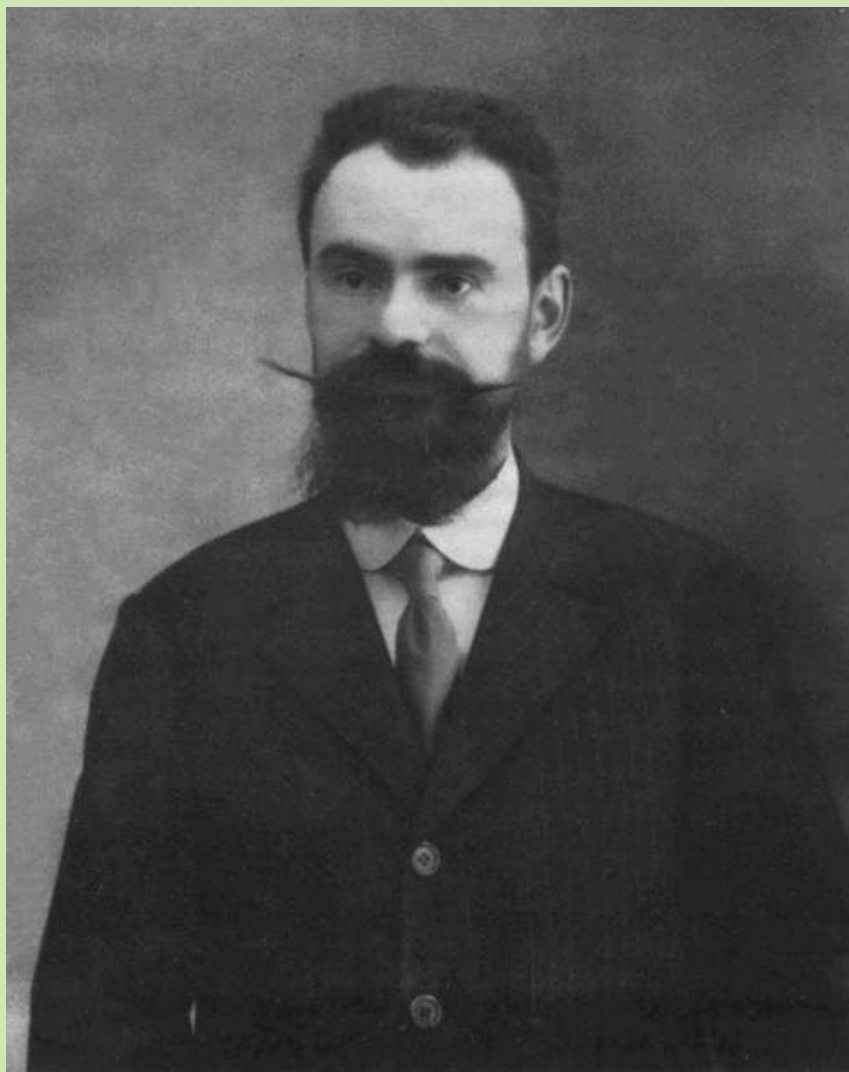




Cesare Arzelà (1847-1912)



Salvatore Pincherle (1853-1936)



Federigo Enriques (1871-1946)

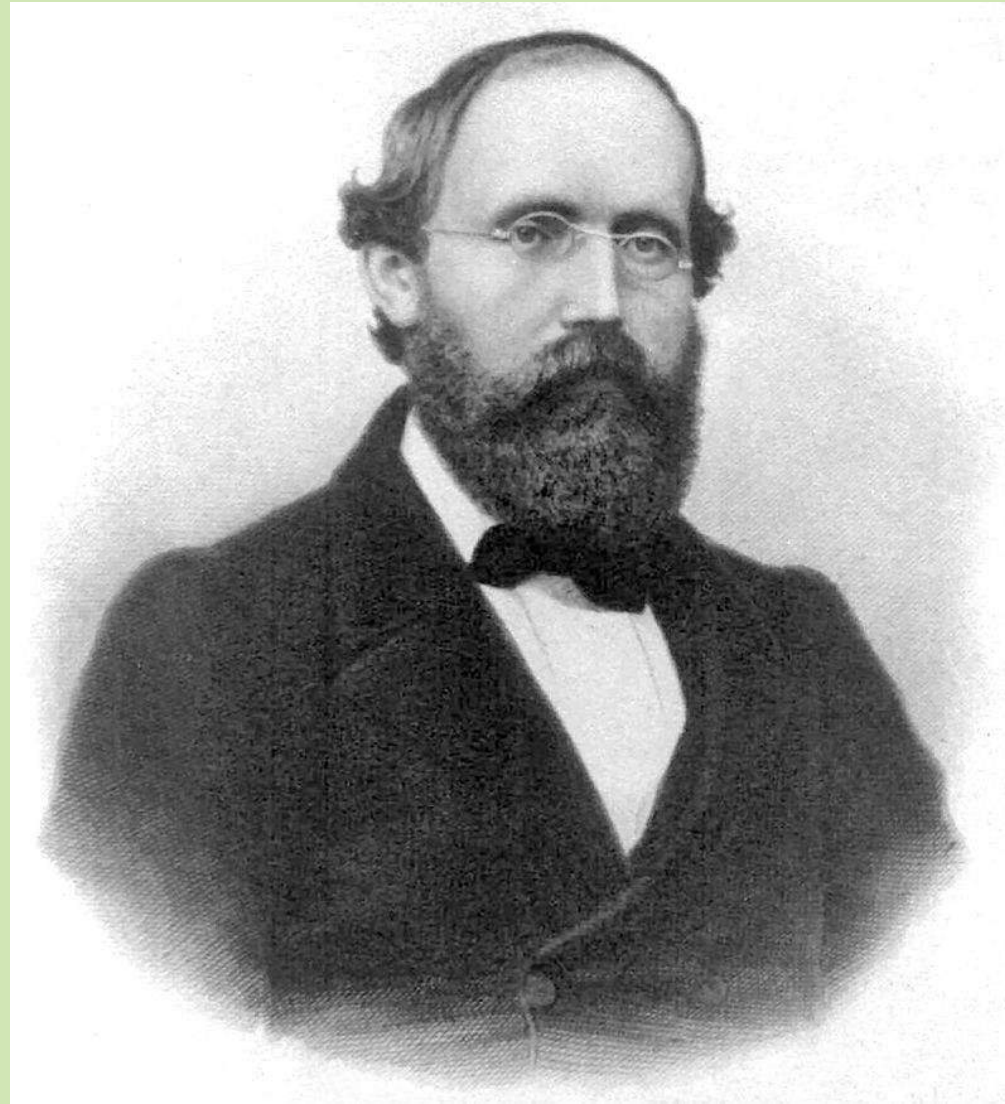




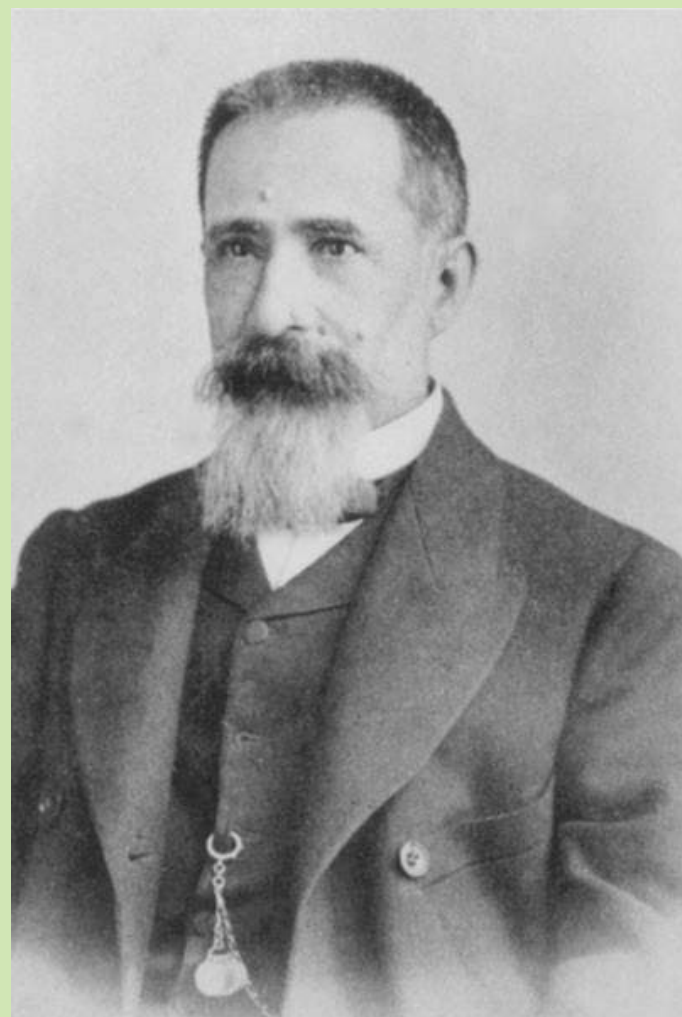
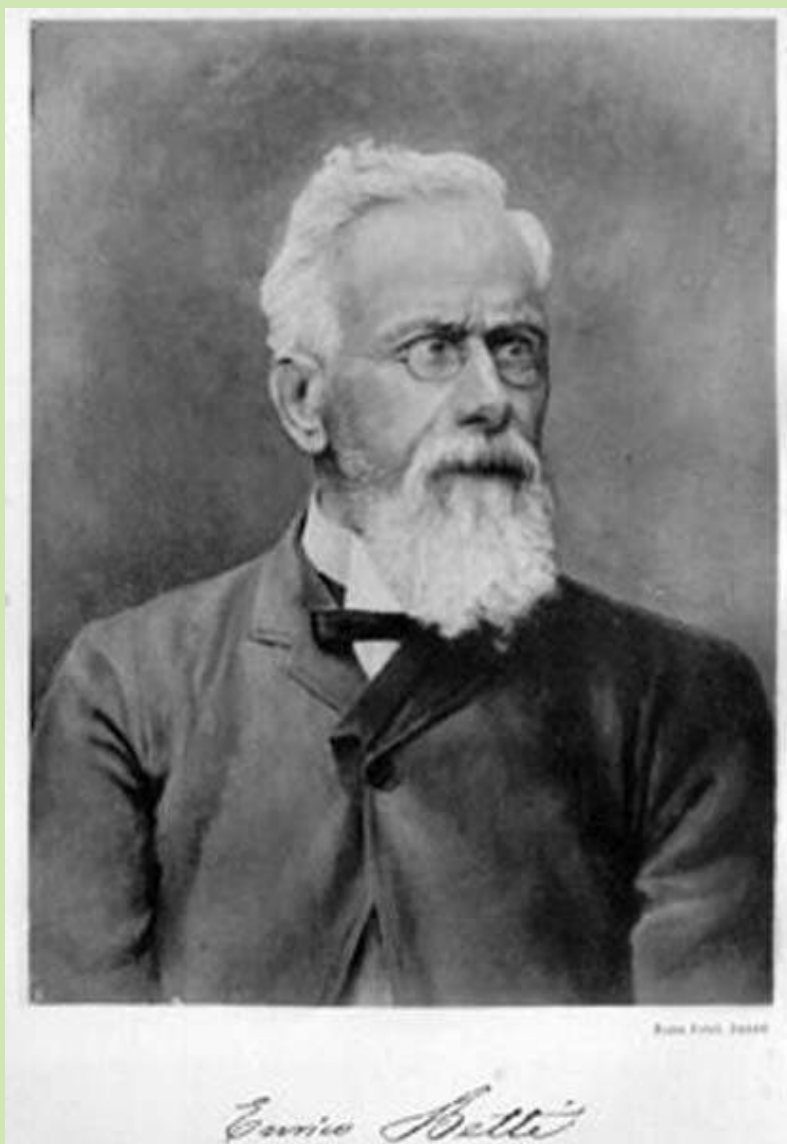
La Scuola Normale di Pisa ha avuto nei primi cinquant'anni dell'unità nazionale un importantissimo ruolo: da una parte ha formato un gruppo assai rilevante dei ricercatori di matematica fornendo i quadri a molte università italiane: ad esempio si sono formati presso la Scuola i matematici che hanno ricreato la scuola matematica di Bologna: Luigi Donati, Cesare Arzelà, Salvatore Pincherle e Federigo Enriques; dall'altra ha indicato il modello, facendo fede al suo nome, la norma, per un elevato insegnamento secondario a cominciare dai licei e dagli istituti tecnici.



Dall'elenco degli alunni usciti dalla Scuola Normale Superiore di Pisa fino all'anno 1896 (Pisa, Nistri, 1896) si ricava che su 104 normalisti della classe di scienze, usciti tra il 1863 e il 1895, trentasei avevano trovato posto nell'istruzione superiore: nelle Università di Pisa, Modena, Padova, Juyui (Argentina), Pavia, Napoli, Bologna, Roma, Catania, Palermo, Torino; nell'Istituto superiore di magistero e nell'Istituto di studi superiori di Firenze; nell'Accademia Navale di Livorno e nell'Accademia militare di Torino; nell'Istituto tecnico superiore Milano. Sessantuno si erano occupati nell'Istruzione secondaria come provveditori agli studi, presidi, insegnanti.



Riemann a Pisa con Betti e Beltrami



Ulisse Dini

Riemann: Studio degli sviluppi in serie di Fourier e dell'integrabilità delle funzioni a cui esse conducevano.

Weierstrass 1861: funzioni continue prive di derivate in ogni punto

Darboux 1873: funzioni derivate di funzioni continue, discontinue, con la proprietà dei valori intermedi.

Dini 1870-1878: Teorica, 1877 lezioni litografate, teorema delle funzioni implicite

Genocchi Peano: calcolo 1884

Peano 1883: area interna e area esterna. Jordan 1893

Peano 1890: curva che riempie un quadrato.

# FONDAMENTI PER LA TEORICA

DELLA

## FUNZIONI DI VARIABILI REALI

DI

### ULISSE DINI

PROFESSORE ORDINARIO DELLA R. UNIVERSITÀ DI PISA



PISA

TIPOGRAFIA T. NISTRI & C.

1878

ANGELO GENOCCHI

# CALCOLO DIFFERENZIALE

E

## PRINCIPII DI CALCOLO INTEGRALE

PUBBLICATO CON AGGIUNTE

DAL

D.<sup>r</sup> GIUSEPPE PEANO



ROMA TORINO FIRENZE

FRATELLI BOCCA

LIBRAI DI S. M. D. RE D'ITALIA

1884



Henri Poincaré: «Prima, quando si inventava una nuova funzione lo si faceva in vista di scopi pratici; oggi lo si fa espressamente per mettere in difetto i ragionamenti dei nostri padri e non ci si caverà altro che questo.»

Hermite a Stieltjes : «lo mi scostò con spavento ed orrore da questa lamentevole piaga delle funzioni continue che non hanno derivata.»

Fubini: «Quando dissi al Bianchi, grande matematico, che l'insieme dei numeri razionali aveva misura nulla secondo Lebesgue, mi rispose canzonandomi e dicendo che studiavo solo i paradossi dell'infinito.»

Lebesgue: «la maggior parte dei lavori sulle funzioni di variabile reale si riducevano ad osservazioni, a volte molto eleganti, che non formavano un corpo di dottrina, e non servivano praticamente a nulla.»

Klein chiamava «patologiche» le inutili funzioni introdotte da Baire e da Borel, che non scaldavano il cuore nemmeno di Picard.



Luigi Bianchi (1856-1928)



Vito Volterra (1860-1940)

## Vitali a Pisa: 1897- 1901

Le prime due memorie pubblicate da Vitali nel 1900, nel medesimo volume dei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, traggono origine dalla tesi di laurea e sono quindi sulla linea delle ricerche di Luigi Bianchi. La prima contiene un'estensione alle superfici di Riemann del teorema di Mittag-Leffler sull'esistenza di funzioni analitiche uniformi con singolarità assegnate in punti prestabiliti del piano complesso, la seconda una proprietà delle funzioni olomorfe di una variabile le cui derivate ennesime hanno limite finito in un punto regolare del piano complesso. Alla tesi di abilitazione, dunque ancora alla influenza di Bianchi e all'analisi complessa, si collegano altre memorie del 1902 e 1903 con lo stesso titolo dove gli integrali abeliani e le funzioni abeliane sono applicati a una classe di equazioni differenziali fuchsiane introdotte da Appell (con punti singolari in classi di Fuchs).

## PARTE PRIMA

Raccolgo in questa e in un'altra prossima memoria alcuni studi, fatti anni addietro, intorno alle serie di funzioni.

Essi comparvero già, sparsi in varie note referentisi anche ad altri argomenti, pubblicate nei rendiconti di questa Accademia e di quella dei Lincei. <sup>(\*)</sup>

Qui li riordino, li modifico dove occorre: semplifico le dimostrazioni e le corrodo di esempi.

Le proprietà di una serie di funzioni

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

dipendono dal modo di comportarsi della somma

$$S(x, n) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$$

(\*) Un'osservazione intorno alle serie di funzioni. Rendiconti della R. Accademia di Bologna, 1883.

Intorno alla continuità della somma di infinite funzioni continue, id. id., 1884.

Un'osservazione intorno alle serie di funzioni, Rendiconti Lincei, Roma, 1885.

Sopra una certa estensione di un teorema relativo alle serie trigonometriche, id. id., 1885.

Sulle funzioni di linee. Memorie R. Accad. di Bologna, 1895.

Sull'integrabilità delle equazioni differenziali, id. id., 1895.

Sull'esistenza degli integrali nelle equazioni differenziali, id. id., 1896.

## [Sul principio di Dirichlet]

È ben nota <sup>(\*)</sup> l'obiezione fatta da Wejerstrass al principio, sul quale si fonda la dimostrazione di Riemann, dell'esistenza della funzione che in un campo assegnato soddisfa all'equazione a derivate parziali

$$\Delta^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

e lungo il contorno assume una prestabilita successione di valori: ed è pure notissimo che all'insufficienza di quella dimostrazione fu riparato poi coi metodi, perfettamente rigorosi e ispirati a principii ben diversi, dati da Schwarz, Neumann, Poincaré.

La possibilità dell'estensione <sup>(\*)</sup> alle funzioni continue di linee o di superficie, dei teoremi fondamentali che valgono per le funzioni continue di punti, fece nascere in me l'idea che essi fossero applicabili a ripristinare il rigore in quella dimostrazione di Riemann che avrebbe pur sempre sulle altre il vantaggio di una estrema generalità e semplicità: ma i miei

(\*) Vedi anche Picard *Cours d'Analyse*. Tomo II.

(\*) Vedi la mia nota *Sulle funzioni di linee* negli Atti dell'Accademia di Bologna per l'anno 1894.

# Teorema di Ascoli-Arzelà

Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , a valori in  $\mathbb{R}$ . Se:

1. Le funzioni  $f_n$  sono **uniformemente limitate**, cioè esiste  $M > 0$  tale che

$$|f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], \forall n$$

2. Le funzioni  $f_n$  sono **equicontinue**, cioè per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall n$$

Allora esiste una **sottosuccessione**  $\{f_{n_k}\}$  che **converge uniformemente** su  $[a, b]$  a una funzione continua.



## Teorema di Vitali per le funzioni olomorfe

Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni olomorfe definite su un dominio  $D \subset \mathbb{C}$ . Supponiamo che:

1. Le  $f_n$  siano **uniformemente limitate su ogni insieme chiuso e limitato** di  $D$ , cioè:

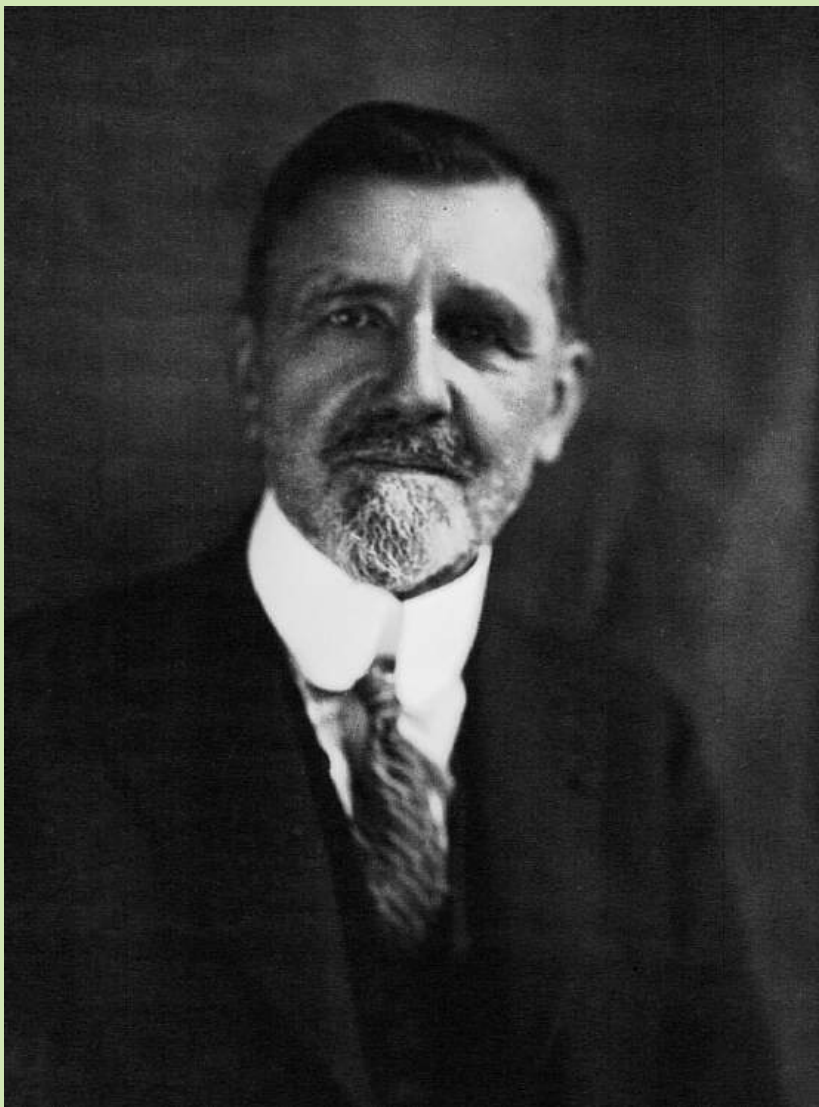
$$\forall K \subset\subset D, \exists M_K \text{ tale che } |f_n(z)| \leq M_K \quad \forall z \in K, \quad \forall n$$

2. La successione  $\{f_n\}$  **converge puntualmente** in un insieme con punto di accumulazione in  $D$ .

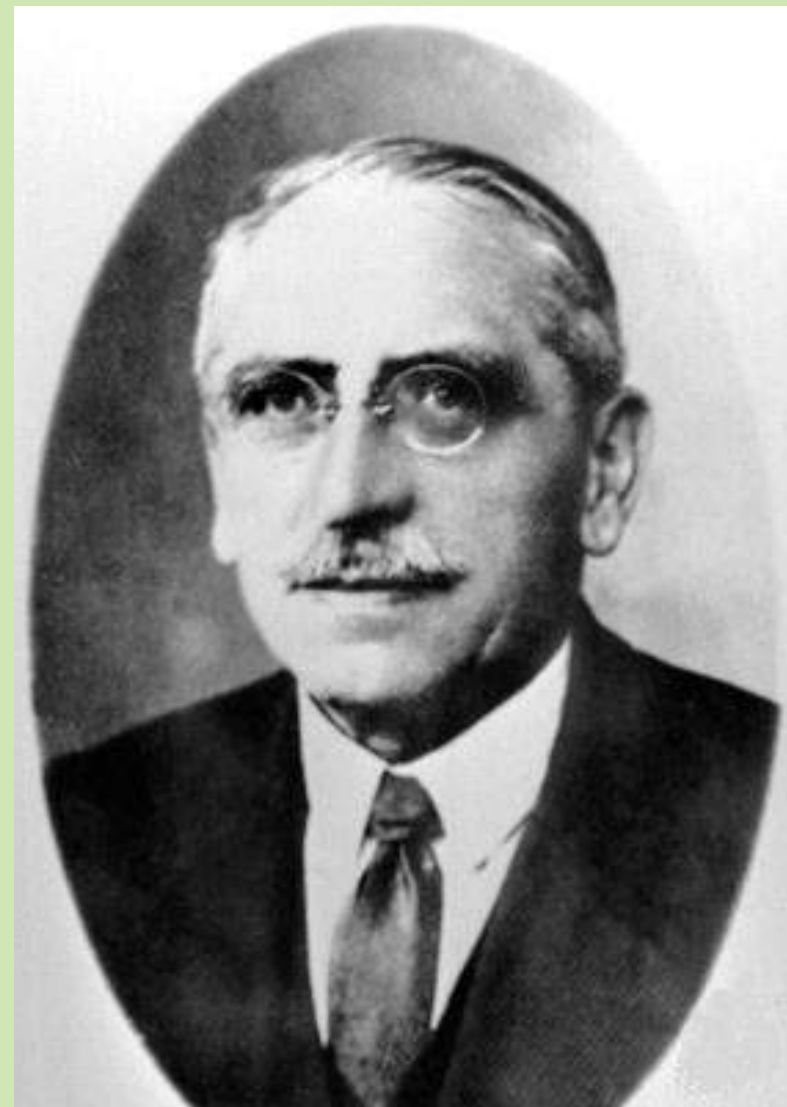
Allora  $\{f_n\}$  **converge uniformemente sui limitati e chiusi** di  $D$  ad una funzione  $f$  **olomorfa** su  $D$ .

Vitali (a Voghera), *Sopra le serie di funzioni analitiche*, 1904

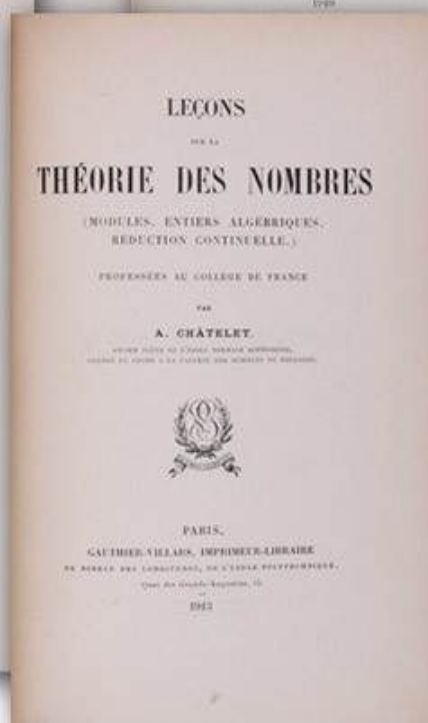
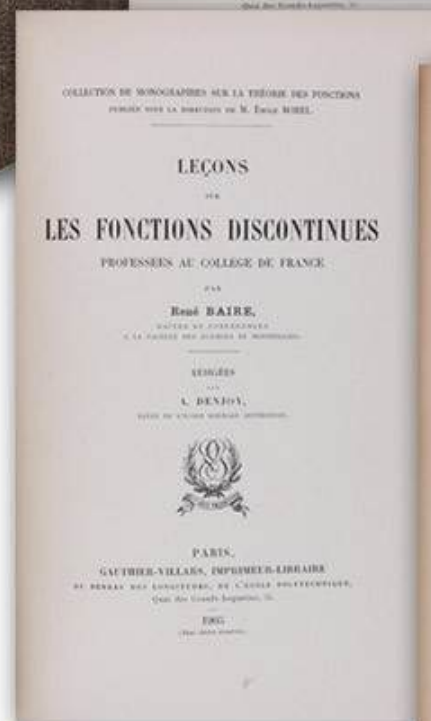
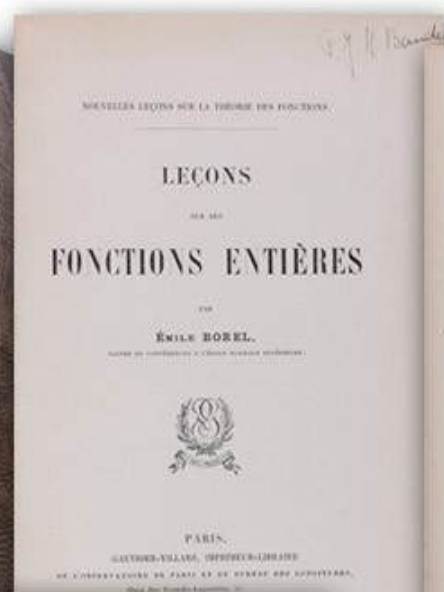
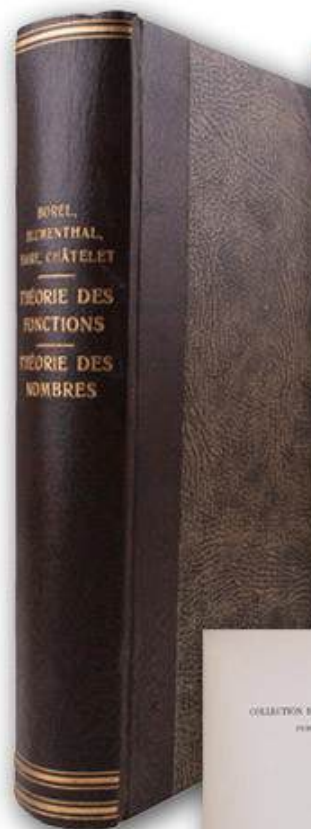




Emile Borel



Henri Lebesgue



ANNALI  
DI  
MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

B. TORTOLINI E F. BRIOSCHI

DIRETTORE Francesco Severi in Roma  
CONDIRETTORE Giovanni Sansone in Firenze

COMITATO DI REDAZIONE

Enrico Bompiani in Roma  
Carlo Miranda in Napoli

Beniamino Segre in Roma  
Antonio Signorini in Roma

SERIE QUARTA - TOMO XLVIII

(CXX DELLA RACCOLTA)

SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE



NICOLA ZANICHELLI EDITORE - BOLOGNA

1959

ANNALI DI MATEMATICA - SERIE QUARTA - TOMO XLVIII

## Funzioni quasi continue

*Una funzione di variabile reale definita e misurabile in un intervallo  $(a, b)$  si può spezzare nella somma di una funzione di classe (di Baire) non maggiore di 2 e di una funzione nulla dovunque all'infuori di un gruppo di punti di misura nulla.*

(riferimenti a Lebesgue 1904, Baire 1905, Borel 1905).

Se  $f(x)$  è una funzione finita e misurabile in un intervallo  $(a, b)$  di lunghezza  $l$ , esiste per ogni numero positivo  $\varepsilon$ , piccolo a piacere, in  $(a, b)$ , un gruppo chiuso di misura maggiore di  $l - \varepsilon$ , tale che i valori di  $f(x)$  nei punti di esso formano una funzione continua.

(detto **teorema di Lusin**).

Vitali (a Genova), *Una proprietà delle funzioni misurabili*, 1905

## Esempio di Vitali di insieme non misurabile

In  $[0,1]$  si stabilisca la relazione di equivalenza:  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

Essa determina una partizione in  $[0,1]$ .

Chiamiamo  $V$  l'insieme di un solo rappresentante in ogni classe:

$$V \subset [0,1]$$

**$V$  non è misurabile.**

Se lo fosse, sarebbe possibile costruire una classe di sottoinsiemi di  $[0,1]$  disgiunti la cui misura totale sarebbe  $+\infty$ .



## Funzioni assolutamente continue

Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **assolutamente continua** se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che, per ogni collezione finita di intervalli disgiunti  $\{(x_k, y_k)\}$  in  $[a, b]$ , con:

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta$$

Si abbia:

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

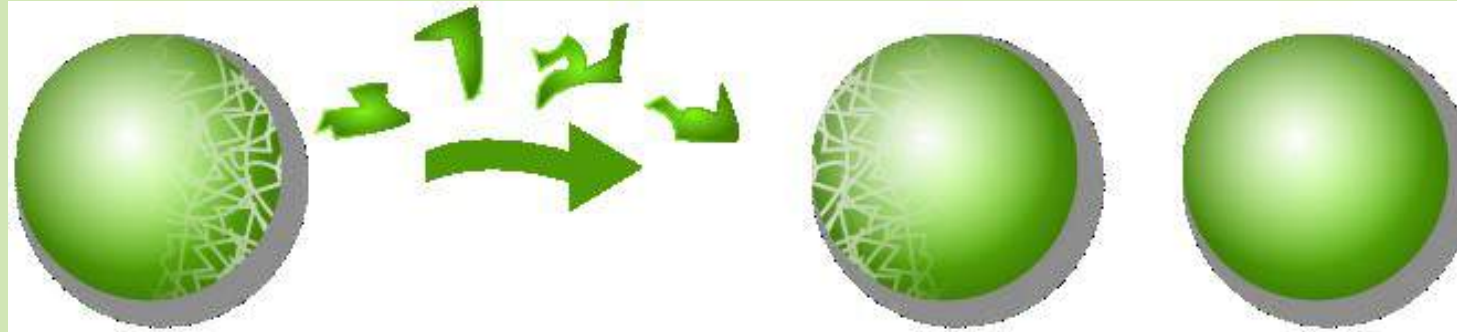
Vitali dimostrò che **ogni funzione  $f$  assolutamente continua è derivabile quasi ovunque** e la sua derivata è integrabile in senso di Lebesgue ed è:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

per ogni  $x \in [a, b]$ .



Ernst Zermelo (1871-1953)



## Teorema di Vitali sulle successioni (Lebesgue e B. Levi)

Sia  $\{f_n\}$  una successione di funzioni **integrabili** su un insieme misurabile  $E \subset \mathbb{R}$  e supponiamo che:

1.  $f_n \rightarrow f$  **puntualmente quasi ovunque** su  $E$ .
2. La successione  $\{f_n\}$  sia **uniformemente integrabile**, cioè per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni insieme misurabile  $A \subset E$  con misura  $|A| < \delta$

$$\sup_n \int_A |f_n| < \varepsilon$$

Allora si ha:

$$f \in L^1(E) \quad \text{e} \quad \int_E f_n \rightarrow \int_E f$$

## Teorema di ricoprimento di Vitali

Sia  $E \subset \mathbb{R}$  un insieme limitato e  $\mathcal{F}$  una famiglia di intervalli che è un **ricoprimento di Vitali** per  $E$ , cioè:

per ogni  $x \in E$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intervallo  $I \in \mathcal{F}$  tale che  $x \in I$  e  $|I| < \varepsilon$ .

Allora esiste un sottoinsieme finito o numerabile di intervalli disgiunti  $\{I_k\} \subset \mathcal{F}$  tale che:

$$m\left(E \setminus \bigcup_k I_k\right) = 0$$

Ossia la parte di  $E$  non coperta da questi intervalli ha misura di Lebesgue nulla.

*Vitali, Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali, 1908*

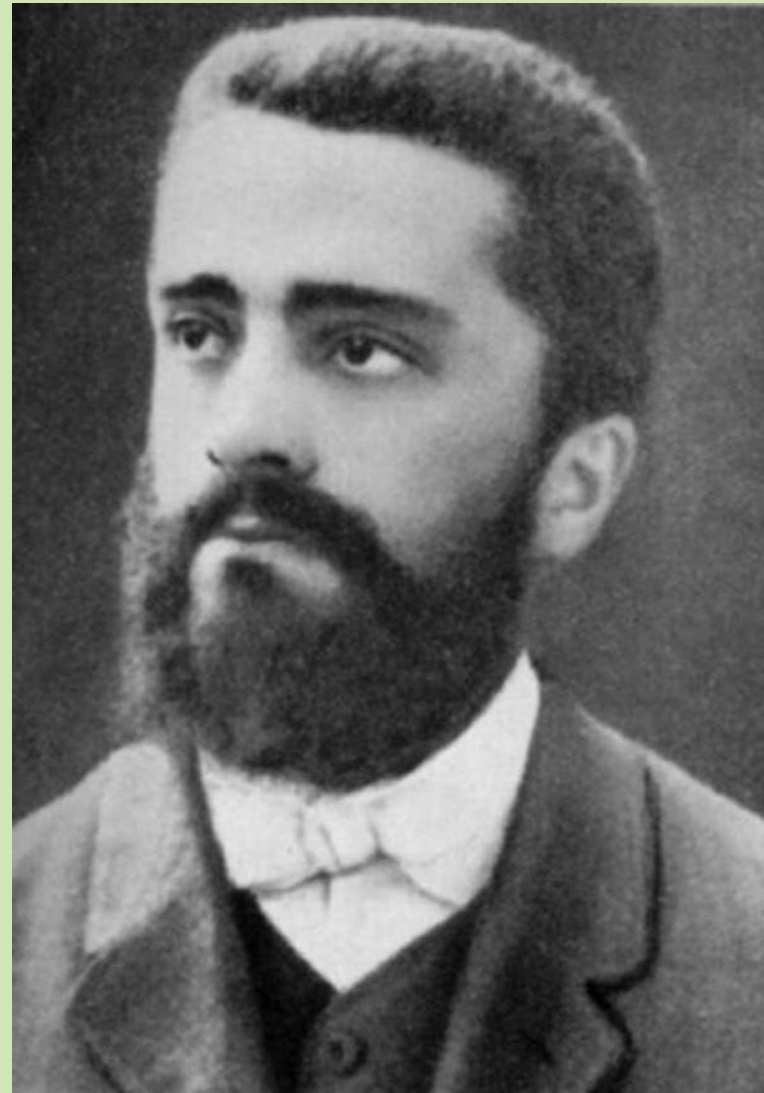
Giuseppe Vitali, libera docenza in Analisi  
matematica 1907

Premio Reale dell'Accademia dei Lincei  
per il 1909 (insieme a Gaetano Scorza)





Beppo Levi, 1875-1961  
Geometria a Cagliari , 1906



Eugenio Levi, 1883-1917  
Analisi a Genova, 1909

a cura di  
Andrea Celli  
Maurizio Mattaliano

# Eugenio Elia Levi

**Le speranze perdute  
della matematica italiana**

*con un intervento di Paolo Monaghan Levi*



Università Commerciale  
Luigi Bocconi  
CENTRO PRESTI

 **Egea**

Concorso Analisi Algebrica Università di Parma  
(20-X-2010)

Commissione: Salvatore Pincherle, Luigi Bianchi,  
Gregorio Ricci Curbastro, Luigi Berzolari, Onorato  
Nicoletti.

Terna: Beppo Levi, Michele Cipolla, Giovanni  
Giambelli

## Giudizio complessivo su Vitali

I lavori del concorrente dimostrano le buone cognizioni dell'Autore in vari rami dell'analisi, il suo acume nel trattare questioni delicate e non facili, giungendo a risultati interessanti, notevole chiarezza e sobrietà nella redazione. Il fatto stesso di essersi incontrato con uno degli inventori del nuovo indirizzo del calcolo integrale, il Lebesgue, prova come egli abbia saputo in queste ricerche tenere la via maestra, in cui tali risultati si presentano naturalmente. Coen 2012, p. 388.



Carlo Severini (1872-1951)  
Catania 1906. S-E 1901  
Severini- Egorov 1910



Leonida Tonelli (1885-1946)  
Cagliari e Parma 2014

Concorso di Analisi Parma 1911):

Commissione: Pincherle (presidente), Pascal, Torelli, Vivanti, Bagnera (segretario)

Terna: Leonida Tonelli, Luciano Orlando, Pasquale Calapso

Vitali, un voto come secondo e come terzo

Concorso annullato per vizi di forma (mancanza di giudizio comparativo).

Concorso di Analisi (Parma 1914).

Commissione: Pincherle (presidente), Bianchi, Torelli, Vivanti, Bagnera (segretario)

Terna: Tonelli, Calapso, Picone

Vitali, un voto come secondo



## Vitali a Genova, 1910-1923

*Fnism*

**Federazione nazionale degli insegnanti**

*presso il Museo storico della Liberazione - Via Tasso, 145 – 00185 Roma*

telefono: 375 6108163 e.mail: [fnism@fnism.it](mailto:fnism@fnism.it)

Soggetto già qualificato per la formazione e l'aggiornamento professionale del personale della scuola, riconfermato ai sensi del DM 170/2016



Gaetano Salvemini



Giuseppe Kirner

I risultati di Vitali entrarono nelle esposizioni di Montel (1912), Pia Nalli (1914), De la Vallée Poussin (1916), ma non nella nuova edizione delle Lezioni di analisi infinitesimale di Dini (1915)

Alla fine della Grande Guerra in Francia (probabilmente da Lebesgue), venne chiesto a Volterra presso quale università insegnasse Vitali. Gli fu risposto che insegnava nelle scuole medie. Con grande meraviglia l'interlocutore osservò che in Italia la matematica se la passava alla grande se ci si poteva permettere di tenere uno come Vitali fuori dell'Università.

Concorso di Analisi matematica, Università di  
Modena, ottobre 1922

Commissione: Guido Fubini, Tullio Levi-Civita,  
Salvatore Pincherle, Leonida Tonelli, Gabriele  
Torelli

Terna: Gustavo Sannia, Giuseppe Vitali, Pia Nalli.

(Fubini e Levi Civita votarono per Vitali al primo posto)



Gustavo Sannia (1875-1930)

GIUSEPPE VITALI

GEOMETRIA  
NELLO SPAZIO HILBERTIANO

M. ZANICHELLI  
BOLOGNA



Nikolai Luzin

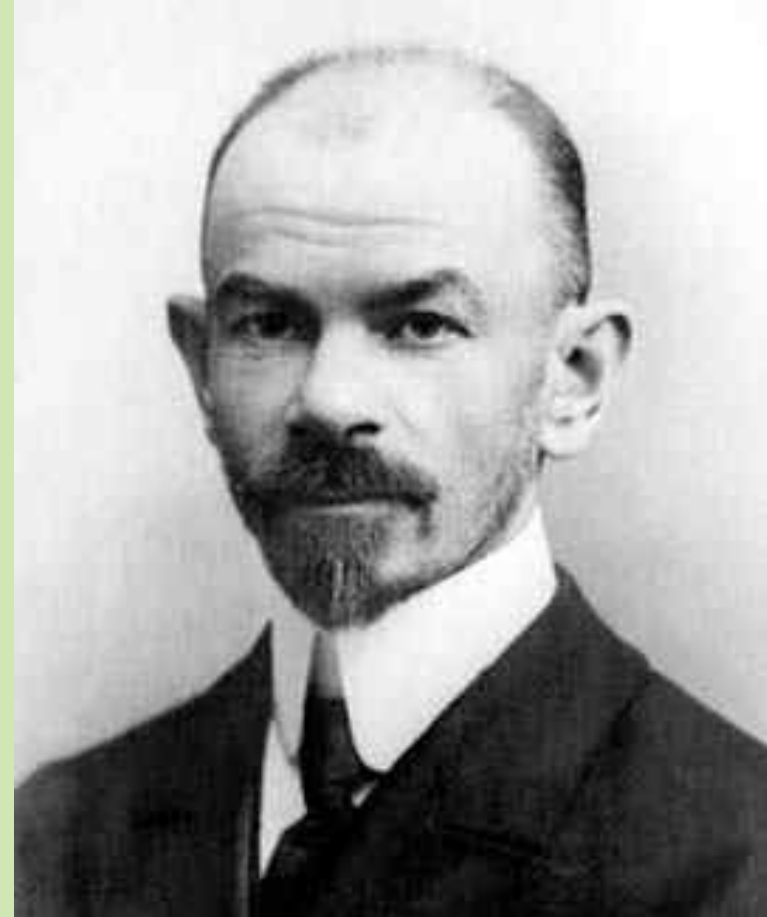


Otton Nikodym

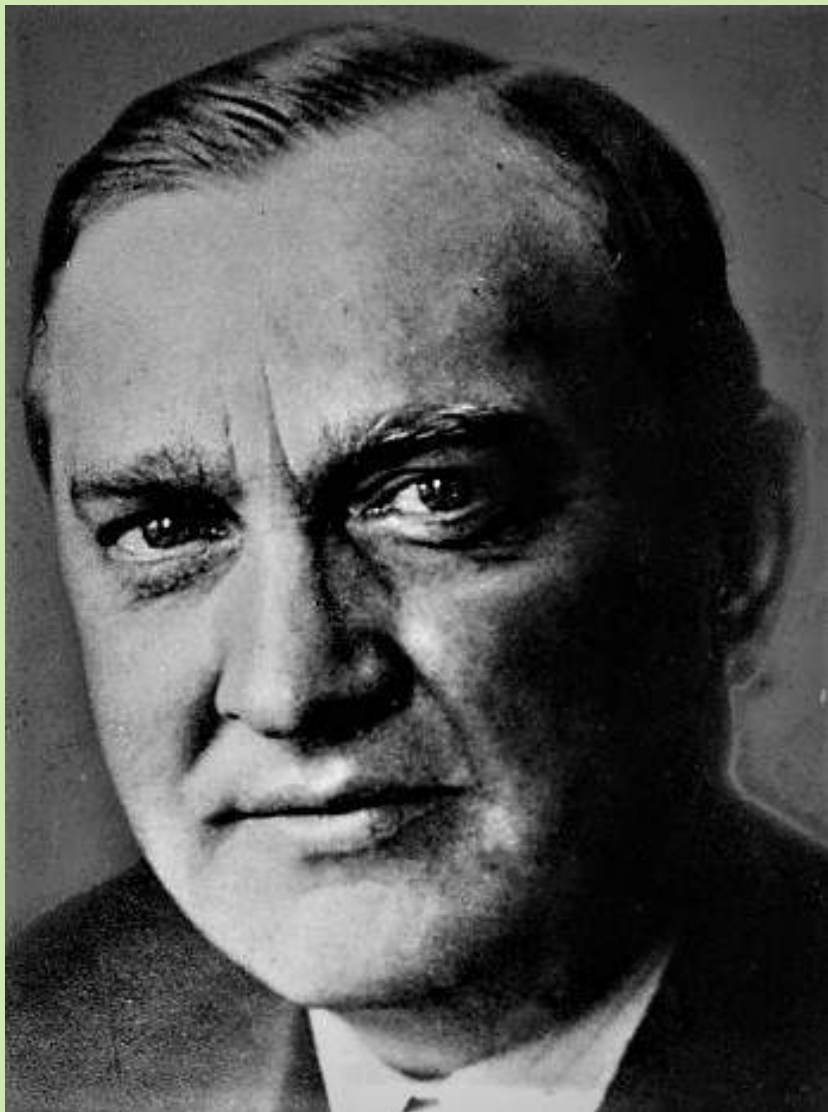




Mikhail Suslin



Dimitri Egorov



Stefan Banach (1892-1945)



A.N. Kolmogorov (1903-1987)



DI **CESARE ARZELÀ**  
INSIGNE TRA I MATEMATICI NOSTRI E GLI STRANIERI  
QUI PROFESSORE DI CALCOLO INFINITESIMALE E DI ANALISI  
CON REVERENTE GRATA PIETÀ  
NEL TERZO ANNIVERSARIO DELLA SUA MORTE  
IL DI XV DI MARZO MCMXV  
POSERO QUESTO RICORDO  
QUANTI EGLI EBBE DISCEPOLI  
NEL TRENTENNIO DEL SUO INSEGNAMENTO  
I QUALI DEL GENIALE MAESTRO  
DALLA CUI MENTE SCATURIVANO LUMINOSE  
LE PIÙ ASTRUSE DOTTRINE  
VOLLERO CHE NELL' UNIVERSITÀ GLORIOSA DEL SUO NOME  
FOSSE PERPETUATA LA CARA PATERNA IMAGINE  
CHE SERBERANNO SEMPRE IMPRESSA NEI CUORI

CESARE ARZELÀ

## OPERE

a cura  
dell'UNIONE MATEMATICA ITALIANA  
pubblicato con il contributo di:  
CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE  
COMUNE DI SANTO STEFANO DI MAGRA  
REGIONE LIGURIA  
PROVINCIA DELLA SPEZIA  
CASSA DI RISPARMIO DI LUCCA  
VITROSELENIA S.p.A.

Volume I

EDIZIONI CREMONESE  
1992



Filippo Sibirani (1880-1957)



Carlo Alberto Dell'Agnola (1871-1956)



GIUSEPPE VITALI

**OPERE**  
**sull'analisi reale e complessa**  
**Carteggio**

*a cura*  
*dell'UNIONE MATEMATICA ITALIANA*  
*con contributo del*  
*CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE*

EDIZIONI CREMONESE  
1984