

Giuseppe Vitali incontra Erwin Schrödinger, le stime dispersive e la restrizione della trasformata di Fourier

Nicola Garofalo
Arizona State University

September 8-9, 2025
Università di Modena
Giornate in occasione del 150° anno
dalla nascita di Giuseppe Vitali

Desidero anzitutto ringraziare **Sergio e Michela** per il caro invito. È un onore speciale partecipare a queste giornate per ricordare l'opera di Vitali, le cui idee profonde hanno contribuito in modo duraturo allo sviluppo dell'analisi moderna

Desidero anzitutto ringraziare **Sergio e Michela** per il caro invito. È un onore speciale partecipare a queste giornate per ricordare l'opera di Vitali, le cui idee profonde hanno contribuito in modo duraturo allo sviluppo dell'analisi moderna

In questo seminario intendo ripercorrere alcuni sviluppi fondamentali - che oggi si possono considerare *classici* - in analisi e nelle equazioni alle derivate parziali di tipo dispersivo che fanno uso di un risultato fondamentale di Giuseppe Vitali. Se il tempo me lo consentirà, accennerò brevemente ai due lavori recenti:

Desidero anzitutto ringraziare **Sergio e Michela** per il caro invito. È un onore speciale partecipare a queste giornate per ricordare l'opera di Vitali, le cui idee profonde hanno contribuito in modo duraturo allo sviluppo dell'analisi moderna

In questo seminario intendo ripercorrere alcuni sviluppi fondamentali - che oggi si possono considerare *classici* - in analisi e nelle equazioni alle derivate parziali di tipo dispersivo che fanno uso di un risultato fondamentale di Giuseppe Vitali. Se il tempo me lo consentirà, accennerò brevemente ai due lavori recenti:

- (1) F. Buseghin & N. Garofalo, *Strichartz estimates for a class of Schrödinger equations with a drift*, ArXiv:2503.12606

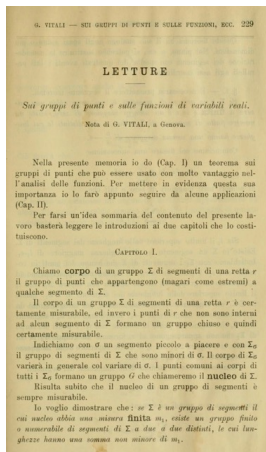
Desidero anzitutto ringraziare **Sergio e Michela** per il caro invito. È un onore speciale partecipare a queste giornate per ricordare l'opera di Vitali, le cui idee profonde hanno contribuito in modo duraturo allo sviluppo dell'analisi moderna

In questo seminario intendo ripercorrere alcuni sviluppi fondamentali - che oggi si possono considerare *classici* - in analisi e nelle equazioni alle derivate parziali di tipo dispersivo che fanno uso di un risultato fondamentale di Giuseppe Vitali. Se il tempo me lo consentirà, accennerò brevemente ai due lavori recenti:

- (1) F. Buseghin & N. Garofalo, *Strichartz estimates for a class of Schrödinger equations with a drift*, ArXiv:2503.12606
- (2) N. Garofalo & G. Staffilani, *Strichartz estimates for a Schrödinger equation on the half-line with a Neumann boundary condition*, ArXiv:2507.19998

L'inizio della mia storia...

- Giuseppe Vitali, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*. Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino, 43 (1908)



- Com'è ben noto, in questo lavoro Vitali dimostra un fondamentale risultato di ricoprimento, universalmente noto come “Vitali covering lemma”, che ha poi avuto, e continua ad avere, importantissime applicazioni in analisi, geometria, equazioni alle derivate parziali, teoria geometrica della misura, probabilità...

- Com'è ben noto, in questo lavoro Vitali dimostra un fondamentale risultato di ricoprimento, universalmente noto come “Vitali covering lemma”, che ha poi avuto, e continua ad avere, importantissime applicazioni in analisi, geometria, equazioni alle derivate parziali, teoria geometrica della misura, probabilità...
- In analisi, il teorema di Vitali svolge un ruolo centrale nella dimostrazione della continuità L^1 debole dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood (Hardy-Littlewood ($n = 1$), Wiener ($n \geq 2$))

$$M : L^1 \longrightarrow L^{1,\infty} \quad (1.1)$$

- Com'è ben noto, in questo lavoro Vitali dimostra un fondamentale risultato di ricoprimento, universalmente noto come “**Vitali covering lemma**”, che ha poi avuto, e continua ad avere, importantissime applicazioni in analisi, geometria, equazioni alle derivate parziali, teoria geometrica della misura, probabilità...
- In analisi, il teorema di Vitali svolge un ruolo centrale nella dimostrazione della continuità L^1 debole dell'operatore massimale di Hardy-Littlewood (Hardy-Littlewood ($n = 1$), Wiener ($n \geq 2$))

$$M : L^1 \longrightarrow L^{1,\infty} \quad (1.1)$$

Combinando (1.1) con l'ovvio fatto che $M : L^\infty \rightarrow L^\infty$, e con il teorema d'interpolazione reale di Marcinkiewicz, si ottiene il teorema massimale di Hardy-Littlewood

$$M : L^p \longrightarrow L^p, \quad 1 < p \leq \infty$$

Il caso geometrico $p = 1$

- Ma la (1.1) svolge un ruolo altrettanto importante in geometria e teoria geometrica della misura in quanto è alla base della continuità debole

$$I_\alpha : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{\frac{n}{n-\alpha}, \infty}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2)$$

dell'operatore d'integrazione frazionaria di Marcel Riesz

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n$$

Il caso geometrico $p = 1$

- Ma la (1.1) svolge un ruolo altrettanto importante in geometria e teoria geometrica della misura in quanto è alla base della continuità debole

$$I_\alpha : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{\frac{n}{n-\alpha}, \infty}(\mathbb{R}^n) \quad (1.2)$$

dell'operatore d'integrazione frazionaria di Marcel Riesz

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy, \quad 0 < \alpha < n$$

- La (1.1) (e quindi indirettamente il teorema di Vitali) è anche alla base della fondamentale **disuguaglianza di Sobolev geometrica**

$$BV(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n) \quad (1.3)$$

- Come è ben noto, la (1.3) è a sua volta equivalente, via co-area, alla **disuguaglianza isoperimetrica**

$$P(E) \geq C(n) \text{Vol}_n(E)^{\frac{n-1}{n}}, \quad (1.4)$$

- Come è ben noto, la (1.3) è a sua volta equivalente, via co-area, alla **disuguaglianza isoperimetrica**

$$P(E) \geq C(n) \text{Vol}_n(E)^{\frac{n-1}{n}}, \quad (1.4)$$

- Disclaimer: Ovviamente, la stima a priori (1.4) nulla dice sulla fondamentale questione della migliore costante e della configurazione geometrica estrema (De Giorgi, 1958)

Il teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev ($p > 1$)

- Nel caso non geometrico vale il seguente risultato che sarà cruciale in quanto sto per raccontare: se $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, allora

$$I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \iff \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \quad (1.5)$$

Il teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev ($p > 1$)

- Nel caso non geometrico vale il seguente risultato che sarà cruciale in quanto sto per raccontare: se $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, allora

$$I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \iff \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \quad (1.5)$$

- Noto esplicitamente che, prendendo $p = q'$ in (1.5) si ottiene

$$I_\alpha : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \iff \frac{2}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n} \quad (1.6)$$

Il teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev ($p > 1$)

- Nel caso non geometrico vale il seguente risultato che sarà cruciale in quanto sto per raccontare: se $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, allora

$$I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \iff \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} \quad (1.5)$$

- Noto esplicitamente che, prendendo $p = q'$ in (1.5) si ottiene

$$I_\alpha : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n) \iff \frac{2}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n} \quad (1.6)$$

- Un aspetto chiave del teorema (1.5) è quello di non rilevare affatto eventuali comportamenti oscillatori: una funzione, o il suo valore assoluto, si “comportano” in modo del tutto analogo

...Entra in scena Erwin Schrödinger...

- È quindi assai sorprendente che, come fra breve vedremo, un risultato come (1.5) occupi un ruolo chiave nell'analisi di un'importante classe di equazioni alle derivate parziali, dette **dispersive**, per le quali invece la natura ondulatoria delle soluzioni rappresenta l'aspetto preminente

...Entra in scena Erwin Schrödinger...

- È quindi assai sorprendente che, come fra breve vedremo, un risultato come (1.5) occupi un ruolo chiave nell'analisi di un'importante classe di equazioni alle derivate parziali, dette **dispersive**, per le quali invece la natura ondulatoria delle soluzioni rappresenta l'aspetto preminente
- Consideriamo il modello dispersivo per eccellenza: il problema di Cauchy per l'**equazione di Schrödinger** in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$

$$\partial_t u - i(\Delta u + Vu) = F(x, t) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.7)$$

dove il termine forzante $F(x, t)$ e il dato iniziale $\varphi(x)$ vengono scelti in opportuni spazi di funzioni a valori in $\mathbb{C}$

...Entra in scena Erwin Schrödinger...

- È quindi assai sorprendente che, come fra breve vedremo, un risultato come (1.5) occupi un ruolo chiave nell'analisi di un'importante classe di equazioni alle derivate parziali, dette **dispersive**, per le quali invece la natura ondulatoria delle soluzioni rappresenta l'aspetto preminente
- Consideriamo il modello dispersivo per eccellenza: il problema di Cauchy per l'**equazione di Schrödinger** in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$

$$\partial_t u - i(\Delta u + Vu) = F(x, t) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad (1.7)$$

dove il termine forzante $F(x, t)$ e il dato iniziale $\varphi(x)$ vengono scelti in opportuni spazi di funzioni a valori in $\mathbb{C}$

- Disclaimer: (i) per semplicità assumerò da ora in poi che il potenziale $V \equiv 0$; (ii) si tenga presente che il tempo è reversibile per (1.7), e quindi la soluzione si può in realtà estendere a ogni $t \in \mathbb{R}$

- È un fatto classico che, se $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'unica soluzione di (1.7) è rappresentata dagli integrali oscillanti

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} S(x - y, t) \varphi(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} S(x - y, t - s) F(y, s) dy ds \quad (1.8)$$

$$= S(t) \varphi(x) + \int_0^t S(t - s) (F(\cdot, s))(x) ds,$$

dove ho posto $S(t) \varphi(x) = S(\cdot, t) \star \varphi(x)$, con

$$S(x, t) = (4\pi it)^{-\frac{n}{2}} e^{i \frac{|x|^2}{4t}} \quad (1.9)$$

- È immediatamente chiaro che, se ad esempio $F(x, t) \equiv 0$, allora vale la seguente **stima dispersiva**

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \neq 0 \quad (1.10)$$

- È immediatamente chiaro che, se ad esempio $F(x, t) \equiv 0$, allora vale la seguente **stima dispersiva**

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall t \neq 0 \quad (1.10)$$

- Per l'equazione di Schrödinger i pacchetti d'onda tendono a disperdersi col tempo. Durante questo processo l'ampiezza della soluzione del problema (1.7) decresce, anche se la sua energia è conservata. Le stime dispersive colgono questo fenomeno, quantificando il decadimento della soluzione in funzione del tempo

- Supponiamo ora che per il problema (1.7) esistano esponenti $1 \leq q, r \leq \infty$ e una costante universale $C = C(n, r, q) > 0$ per cui valga la seguente stima a priori

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} \leq C \|\varphi\|_{L^2}, \quad (1.11)$$

dove $L_t^q L_x^r$ indica lo spazio anisotropo di Lebesgue delle funzioni misurabili $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tali che

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^r dx \right)^{\frac{q}{r}} dt \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_{L_x^r}^q dt \right)^{1/q} < \infty$$

- Supponiamo ora che per il problema (1.7) esistano esponenti $1 \leq q, r \leq \infty$ e una costante universale $C = C(n, r, q) > 0$ per cui valga la seguente stima a priori

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} \leq C \|\varphi\|_{L^2}, \quad (1.11)$$

dove $L_t^q L_x^r$ indica lo spazio anisotropo di Lebesgue delle funzioni misurabili $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tali che

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^r dx \right)^{\frac{q}{r}} dt \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_{L_x^r}^q dt \right)^{1/q} < \infty$$

- Sia $u(x, t)$ la soluzione di (1.7) corrispondente a $F(x, t) \equiv 0$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Siccome l'equazione è invariante rispetto alle **dilatazioni anisotrope** $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$, è chiaro che u_λ risolve (1.7) con dato iniziale $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$

- Sostituendo $u_\lambda, \varphi_\lambda$ in (1.11), e cambiando variabile ($y = \lambda x$, $\tau = \lambda^2 t$), giungiamo alla conclusione

$$\text{se vale (1.11)} \implies (*) \quad \boxed{\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)}$$

Notiamo che la $(*)$ implica che $r \geq 2$

- Sostituendo $u_\lambda, \varphi_\lambda$ in (1.11), e cambiando variabile ($y = \lambda x$, $\tau = \lambda^2 t$), giungiamo alla conclusione

$$\text{se vale (1.11)} \implies (*) \quad \boxed{\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)}$$

Notiamo che la $(*)$ implica che $r \geq 2$

Definition 1

Sia $r > 2$. Diremo che una coppia di esponenti (q, r) è **ammissibile** se essa verifica la $(*)$. Quando $n > 2$, richiederemo inoltre che $r < \frac{2n}{n-2}$ (questa ulteriore ipotesi serve a garantire che $n(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}) < 1$)

- Sostituendo $u_\lambda, \varphi_\lambda$ in (1.11), e cambiando variabile ($y = \lambda x$, $\tau = \lambda^2 t$), giungiamo alla conclusione

$$\text{se vale (1.11)} \implies (*) \quad \boxed{\frac{2}{q} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)}$$

Notiamo che la $(*)$ implica che $r \geq 2$

Definition 1

Sia $r > 2$. Diremo che una coppia di esponenti (q, r) è **ammissibile** se essa verifica la $(*)$. Quando $n > 2$, richiederemo inoltre che $r < \frac{2n}{n-2}$ (questa ulteriore ipotesi serve a garantire che $n(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}) < 1$)

- Quindi l'ammissibilità è condizione necessaria per la (1.11). Un aspetto fondamentale della teoria è che essa è anche **sufficiente**! Ma prima di parlare di ciò devo fare un passo indietro...

Le stime di Strichartz

Le stime di Strichartz

- È importante osservare che per ogni $r > 2$ la coppia (r, r) è sempre ammissibile. Infatti, prendendo $q = r$ in $(\star)$ vediamo che dev'essere

$$\boxed{q = r = \frac{2(n+2)}{n}, \quad q' = r' = \frac{2(n+2)}{n+4}} \quad (1.12)$$

(si noti che per tale valore di r risulta banalmente $r < 2$, e inoltre $r < \frac{2n}{n-2}$ quando $n > 2$)

Le stime di Strichartz

- È importante osservare che per ogni $r > 2$ la coppia (r, r) è sempre ammissibile. Infatti, prendendo $q = r$ in $(\star)$ vediamo che dev'essere

$$\boxed{q = r = \frac{2(n+2)}{n}, \quad q' = r' = \frac{2(n+2)}{n+4}} \quad (1.12)$$

(si noti che per tale valore di r risulta banalmente $r < 2$, e inoltre $r < \frac{2n}{n-2}$ quando $n > 2$)

- Strichartz** in un suo celebrato lavoro del 1977 dimostrò che la soluzione di (1.7) verifica la seguente fondamentale stima a priori: esiste una costante universale $C(n) > 0$ tale che

$$\|u\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C(n) \left(\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n+4}}(\mathbb{R}^{n+1})} \right) \quad (1.13)$$

La (1.13) è ottimale, e questo lo abbiamo già implicitamente dimostrato usando l'invarianza per dilatazioni anisotrope dell'operatore di Schrödinger

La congettura di restrizione

- Un aspetto importante della (1.13) è il suo stretto legame con una proprietà profonda della **trasformata di Fourier**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx$$

La congettura di restrizione

- Un aspetto importante della (1.13) è il suo stretto legame con una proprietà profonda della **trasformata di Fourier**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx$$

- Siano $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Il teorema di Hausdorff-Young garantisce che, se $1 \leq r' \leq 2$, allora **$f \in L^{r'}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{f} \in L^r(\mathbb{R}^n)$** . Poichè una funzione in uno spazio di Lebesgue è definita solo quasi ovunque, a priori non ha alcun senso considerare la restrizione di $\hat{f} \in L^r(\mathbb{R}^n)$ a una ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$ (un insieme di misura n -dimensionale nulla)

La congettura di restrizione

- Un aspetto importante della (1.13) è il suo stretto legame con una proprietà profonda della **trasformata di Fourier**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx$$

- Siano $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Il teorema di Hausdorff-Young garantisce che, se $1 \leq r' \leq 2$, allora $f \in L^{r'}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{f} \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Poichè una funzione in uno spazio di Lebesgue è definita solo quasi ovunque, a priori non ha alcun senso considerare la restrizione di $\hat{f} \in L^r(\mathbb{R}^n)$ a una ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$ (un insieme di misura n -dimensionale nulla)
- Nei primi anni 70 **E. Stein** formulò la **congettura di restrizione** che postula che - in un senso che preciserò fra breve - si possa **restringere** la trasformata di Fourier a una varietà avente **curvatura**.

La congettura di restrizione

- Un aspetto importante della (1.13) è il suo stretto legame con una proprietà profonda della **trasformata di Fourier**

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx$$

- Siano $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Il teorema di Hausdorff-Young garantisce che, se $1 \leq r' \leq 2$, allora $f \in L^{r'}(\mathbb{R}^n) \implies \hat{f} \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Poichè una funzione in uno spazio di Lebesgue è definita solo quasi ovunque, a priori non ha alcun senso considerare la restrizione di $\hat{f} \in L^r(\mathbb{R}^n)$ a una ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$ (un insieme di misura n -dimensionale nulla)
- Nei primi anni 70 **E. Stein** formulò la **congettura di restrizione** che postula che - in un senso che preciserò fra breve - si possa **restringere** la trasformata di Fourier a una varietà avente **curvatura**.
- Questo problema rappresenta la più fondamentale questione aperta in analisi classica

- Formulare in modo rigoroso l'affascinante congettura di restrizione non è semplice, in quanto bisogna portare alla luce riposte condizioni necessarie (il famoso argomento di A. Knapp) e, in quei casi in cui la congettura ha ricevuto una risposta positiva, eventuali condizioni sufficienti. Mi limito perciò a enunciarla

- Formulare in modo rigoroso l'affascinante congettura di restrizione non è semplice, in quanto bisogna portare alla luce riposte condizioni necessarie (il famoso argomento di A. Knapp) e, in quei casi in cui la congettura ha ricevuto una risposta positiva, eventuali condizioni sufficienti. Mi limito perciò a enunciarla

CONGETTURA: Sia $1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$. È vero che se $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$, esiste una costante universale $A_{n,p,q} > 0$ tale che, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si abbia

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}? \quad (1.14)$$

- Formulare in modo rigoroso l'affascinante congettura di restrizione non è semplice, in quanto bisogna portare alla luce riposte condizioni necessarie (il famoso argomento di A. Knapp) e, in quei casi in cui la congettura ha ricevuto una risposta positiva, eventuali condizioni sufficienti. Mi limito perciò a enunciarla

CONGETTURA: Sia $1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$. È vero che se $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$, esiste una costante universale $A_{n,p,q} > 0$ tale che, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si abbia

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.14)$$

- Se $p = 1$, allora $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ e quindi (1.14) è banalmente vera

- Formulare in modo rigoroso l'affascinante congettura di restrizione non è semplice, in quanto bisogna portare alla luce riposte condizioni necessarie (il famoso argomento di A. Knapp) e, in quei casi in cui la congettura ha ricevuto una risposta positiva, eventuali condizioni sufficienti. Mi limito perciò a enunciarla

CONGETTURA: Sia $1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$. È vero che se $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$, esiste una costante universale $A_{n,p,q} > 0$ tale che, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si abbia

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.14)$$

- Se $p = 1$, allora $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ e quindi (1.14) è banalmente vera
- La (1.14) è **falsa** se si sostituisce la sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ con una porzione di iperpiano! (non c'è restrizione a una ipersuperficie non curva)

- Formulare in modo rigoroso l'affascinante congettura di restrizione non è semplice, in quanto bisogna portare alla luce riposte condizioni necessarie (il famoso argomento di A. Knapp) e, in quei casi in cui la congettura ha ricevuto una risposta positiva, eventuali condizioni sufficienti. Mi limito perciò a enunciarla

CONGETTURA: Sia $1 \leq p < \frac{2n}{n+1}$. È vero che se $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$, esiste una costante universale $A_{n,p,q} > 0$ tale che, per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, si abbia

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.14)$$

- Se $p = 1$, allora $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^n)$ e quindi (1.14) è banalmente vera
- La (1.14) è **falsa** se si sostituisce la sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ con una porzione di iperpiano! (non c'è restrizione a una ipersuperficie non curva)
- La presenza della sfera $\mathbb{S}^{n-1}$ a lato sinistro della (1.14) è irrilevante: essa si può sostituire con una qualunque ipersuperficie compatta avente curvatura Gaussiana strettamente positiva

- Se $n = 2$ la congettura è un teorema (Zygmund, 1974)

- Se $n = 2$ la congettura è un teorema (Zygmund, 1974)
- Se prendiamo $q = 2$ in (1.14), la stima di restrizione diventa

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A_n \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \quad (1.15)$$

La (1.15) è un risultato famoso, noto come teorema di **Tomas-Stein** (1975)

- Se $n = 2$ la congettura è un teorema (Zygmund, 1974)
- Se prendiamo $q = 2$ in (1.14), la stima di restrizione diventa

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})} \leq A_n \|f\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \quad (1.15)$$

La (1.15) è un risultato famoso, noto come teorema di **Tomas-Stein** (1975)

- Se in (1.15) si prende una ipersuperficie compatta $\Sigma_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con curvatura Gaussiana positiva, la stima che si ottiene è:

$$\|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma_n)} \leq A_n \|f\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n}}(\mathbb{R}^{n+1})}. \quad (1.16)$$

Si noti a lato destro della (1.16) lo stesso esponente che appare a lato sinistro della stima di Strichartz (1.13)! Questa non è una coincidenza

- E infatti Strichartz aveva dimostrato la sua stima (1.13) proprio generalizzando il teorema di Tomas-Stein al paraboloide troncato

$$\Sigma_M = \{(\xi, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \xi_{n+1} = -2\pi|\xi|^2, |\xi| \leq M\}$$

Quindi

teor. restrizione Tomas-Stein $\implies$ stima di Strichartz (1.13)

- E infatti Strichartz aveva dimostrato la sua stima (1.13) proprio generalizzando il teorema di Tomas-Stein al paraboloide troncato

$$\Sigma_M = \{(\xi, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \xi_{n+1} = -2\pi|\xi|^2, |\xi| \leq M\}$$

Quindi

teor. restrizione Tomas-Stein $\implies$ stima di Strichartz (1.13)

- Come adesso vedremo, una notevole estensione delle stime originali di Strichartz implica, come corollario, il teorema di restrizione di Tomas-Stein. Quindi

Strichartz generalizzate $\iff$ Restrizione alla Tomas-Stein

Il metodo T^*T di Ginibre-Velo

- In due importanti lavori (1979 e poi 1985) Jean Ginibre e Giorgio Velo introdussero un nuovo ingegnoso approccio, noto come il metodo T^*T , alle stime dispersive di tipo Strichartz

Il metodo T^*T di Ginibre-Velo

- In due importanti lavori (1979 e poi 1985) Jean Ginibre e Giorgio Velo introdussero un nuovo ingegnoso approccio, noto come il metodo T^*T , alle stime dispersive di tipo Strichartz
- Questi due fisici dimostrarono il seguente fondamentale risultato:

Il metodo T^*T di Ginibre-Velo

- In due importanti lavori (1979 e poi 1985) Jean Ginibre e Giorgio Velo introdussero un nuovo ingegnoso approccio, noto come il **metodo T^*T** , alle stime dispersive di tipo Strichartz
- Questi due fisici dimostrarono il seguente fondamentale risultato:

Theorem 2

Se la coppia (q, r) è ammissibile, allora esiste una costante universale $C(n, r) > 0$ tale che, dati $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, l'unica soluzione u del problema (1.7) verifica la stima a priori

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} \leq C(n, r) \left(\|\varphi\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \right) \quad (1.17)$$

Il metodo T^*T di Ginibre-Velo

- In due importanti lavori (1979 e poi 1985) Jean Ginibre e Giorgio Velo introdussero un nuovo ingegnoso approccio, noto come il **metodo T^*T** , alle stime dispersive di tipo Strichartz
- Questi due fisici dimostrarono il seguente fondamentale risultato:

Theorem 2

Se la coppia (q, r) è ammissibile, allora esiste una costante universale $C(n, r) > 0$ tale che, dati $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, l'unica soluzione u del problema (1.7) verifica la stima a priori

$$\|u\|_{L_t^q L_x^r} \leq C(n, r) \left(\|\varphi\|_{L^2} + \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \right) \quad (1.17)$$

- Poichè per ogni $r > 2$ la coppia (r, r) è sempre ammissibile, e in tal caso $q = r$ sono determinati come in (1.12), è dunque chiaro che

$$\text{Ginibre-Velo (1.17)} \implies \text{Strichartz (1.13)}$$

- Per illustrare l'approccio di Ginibre e Velo al Teorema 10 consideriamo l'operatore di soluzione del problema di Cauchy omogeneo (1.7) ($F(x, t) \equiv 0$)

$$T^*\varphi(x, t) = S(t)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} S(x - y, t)\varphi(y)dy$$

Vale la seguente

Proposition 3

L'operatore $T^ : L_x^2 \rightarrow L_t^\infty L_x^2$, e risulta*

$$\|T^*\varphi\|_{L_t^\infty L_x^2} = \|\varphi\|_{L_x^2}.$$

- Per illustrare l'approccio di Ginibre e Velo al Teorema 10 consideriamo l'operatore di soluzione del problema di Cauchy omogeneo (1.7) ($F(x, t) \equiv 0$)

$$T^* \varphi(x, t) = S(t) \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} S(x - y, t) \varphi(y) dy$$

Vale la seguente

Proposition 3

L'operatore $T^ : L_x^2 \rightarrow L_t^\infty L_x^2$, e risulta*

$$\|T^* \varphi\|_{L_t^\infty L_x^2} = \|\varphi\|_{L_x^2}.$$

- Basta osservare che

$$\widehat{T^* \varphi}(\xi, t) = \widehat{S(\cdot, t) \star \varphi(\xi)} = \widehat{S(\cdot, t)}(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = e^{-4\pi^2 i t |\xi|^2} \hat{\varphi}(\xi)$$

e quindi la conclusione desiderata segue immediatamente dal teorema di Plancherel

- Se adesso consideriamo l'operatore $T : L_t^1 L_x^2 \rightarrow L_x^2$ il cui duale è T^* , un semplice calcolo dimostra che

$$T(F)(x) = \int_{\mathbb{R}} S(-t)(F(\cdot, t))(x) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} S(x - y, -t) F(y, t) dt$$

- Se adesso consideriamo l'operatore $T : L_t^1 L_x^2 \rightarrow L_x^2$ il cui duale è T^* , un semplice calcolo dimostra che

$$T(F)(x) = \int_{\mathbb{R}} S(-t)(F(\cdot, t))(x) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} S(x - y, -t) F(y, t) dy dt$$

- È quindi chiaro che

$$\begin{aligned} \|T(F)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\widehat{T(F)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}} \|S(\cdot, -t) \star F(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{F}(\cdot, t)\|_{L_x^2} dt = \int_{\mathbb{R}} \|F(\cdot, t)\|_{L_x^2} dt = \|F\|_{L_t^1 L_x^2} \end{aligned}$$

- Se adesso consideriamo l'operatore $T : L_t^1 L_x^2 \rightarrow L_x^2$ il cui duale è T^* , un semplice calcolo dimostra che

$$T(F)(x) = \int_{\mathbb{R}} S(-t)(F(\cdot, t))(x) dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} S(x - y, -t) F(y, t) dy dt$$

- È quindi chiaro che

$$\begin{aligned} \|T(F)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\widehat{T(F)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}} \|S(\cdot, -t) \star \widehat{F}(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{F}(\cdot, t)\|_{L_x^2} dt = \int_{\mathbb{R}} \|F(\cdot, t)\|_{L_x^2} dt = \|F\|_{L_t^1 L_x^2} \end{aligned}$$

- Notiamo a questo punto la seguente proprietà chiave della composizione T^*T

$$\begin{aligned} T^*(T(F))(x, t) &= S(t)(T(F))(x) \\ &= S(t) \int_{\mathbb{R}} S(-\tau)(F(\cdot, \tau))(x) d\tau = \int_{\mathbb{R}} S(t - \tau)(F(\cdot, \tau))(x) d\tau \end{aligned} \tag{1.18}$$

- Dimostriamo ora una proprietà cruciale dell'operatore di composizione T^*T . Sorprendentemente, in questo risultato ritroveremo il teorema non-geometrico di Hardy-Littlewood-Sobolev (1.5) (nella sua versione (1.6)), che, come abbiamo visto, poggia in modo essenziale sul teorema di ricoprimento di Vitali.

- Dimostriamo ora una proprietà cruciale dell'operatore di composizione T^*T . Sorprendentemente, in questo risultato ritroveremo il teorema non-geometrico di Hardy-Littlewood-Sobolev (1.5) (nella sua versione (1.6)), che, come abbiamo visto, poggia in modo essenziale sul teorema di ricoprimento di Vitali.

Theorem 4

Sia (q, r) una coppia ammissibile. Allora esiste $C(n, r) > 0$ tale che per ogni $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ si abbia

$$\|T^*T(F)\|_{L_t^q L_x^r} \leq C(n, r) \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}.$$

- L'intuizione fondamentale di Ginibre e Velo sta nel fatto che l'operatore T^*T si possa controllare con un'opportuno operatore d'integrazione frazionaria sulla retta

$$I_\alpha(h)(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\tau)}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau.$$

- L'intuizione fondamentale di Ginibre e Velo sta nel fatto che l'operatore T^*T si possa controllare con un'opportuno operatore d'integrazione frazionaria sulla retta

$$I_\alpha(h)(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\tau)}{|t - \tau|^{1-\alpha}} d\tau.$$

- Precisamente, vale la seguente stima

$$\|T^*T(F)(\cdot, t)\|_{L_x^r} \leq C(n, r) I_\alpha(h)(t), \quad (1.19)$$

dove

$$\alpha = 1 - n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right), \quad \text{e} \quad h(t) = \|F(\cdot, t)\|_{L_x^{r'}}$$

(ricordo che nella definizione di ammissibilità avevo richiesto che $r < \frac{2n}{n-2}$ se $n > 2$, e notato che ciò implica $n(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}) < 1$. Quindi, $\alpha < 1$ se $n > 2$. Poichè $r > 2$ per ipotesi, ciò è anche banalmente vero se $n = 1, 2$)

- La dimostrazione della (1.19) si basa in modo cruciale sulla (1.18), e sulla cosiddetta **stima dispersiva fondamentale**: per ogni $r \geq 2$ esiste una costante universale $C(n, r) > 0$ tale che

$$\|S(t)\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, r)|t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|\varphi\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.20)$$

dove ho posto $S(t)\varphi(x) = S(\cdot, t) \star \varphi(x)$

- La dimostrazione della (1.19) si basa in modo cruciale sulla (1.18), e sulla cosiddetta **stima dispersiva fondamentale**: per ogni $r \geq 2$ esiste una costante universale $C(n, r) > 0$ tale che

$$\|S(t)\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C(n, r)|t|^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}\|\varphi\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.20)$$

dove ho posto $S(t)\varphi(x) = S(\cdot, t) \star \varphi(x)$

- La (1.20) è sostanzialmente una riformulazione del teorema di Hausdorff-Young per la trasformata di Fourier e, come esso, si dimostra interpolando alla Riesz-Thorin fra le già sopra osservate

$$\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq C(n)|t|^{-\frac{n}{2}}\|\varphi\|_{L^1}, \quad \|S(t)\varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}.$$

La prima stima è una riscrittura della (1.10), la seconda uguaglianza è la Proposizione 3 (Plancherel)

- La prova della (1.19) procede così: ricordando la (1.18), abbiamo

$$\begin{aligned} \|T^*T(F)(\cdot, t)\|_{L_x^r} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} S(t-\tau)(F(\cdot, \tau))d\tau \right\|_{L_x^r} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|S(t-\tau)(F(\cdot, \tau))\|_{L_x^r} d\tau \leq C(n, r) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|F(\cdot, \tau)\|_{L_x^{r'}}}{|t-\tau|^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}} d\tau, \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza s'è usata la (1.20)

- La prova della (1.19) procede così: ricordando la (1.18), abbiamo

$$\begin{aligned} \|T^*T(F)(\cdot, t)\|_{L_x^r} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} S(t-\tau)(F(\cdot, \tau))d\tau \right\|_{L_x^r} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|S(t-\tau)(F(\cdot, \tau))\|_{L_x^r} d\tau \leq C(n, r) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|F(\cdot, \tau)\|_{L_x^{r'}}}{|t-\tau|^{n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})}} d\tau, \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza s'è usata la (1.20)

- Seguendo Ginibre e Velo, combinando la (1.19) con il teorema d'integrazione frazionaria nella sua versione (1.6), si giunge a concludere la validità dell'importante Teorema 4, con $r > 2$ e q dato dalla relazione di Hardy-Littlewood-Sobolev (si veda (1.6))

$$\frac{2}{q} = 1 - \alpha = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right),$$

esattamente la condizione di **ammissibilità** (★)!

Il Teorema 4 ha la seguente importante conseguenza

Theorem 5 (Stima di restrizione)

Nelle ipotesi del Teorema 4, si ha per ogni $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\|T(F)\|_{L_x^2} \leq C'(n, r) \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}.$$

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \|T(F)\|_{L_x^2}^2 &= \langle T(F), T(F) \rangle_{L_x^2} = \langle \langle T^*(T(F)), F \rangle \rangle_{L_t^2 L_x^2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{F(x, t)} T^*(T(F))(x, t) dx dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |T^*(T(F))(x, t)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, t)|^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} dt \\ &\leq \|T^* T(F)\|_{L_t^q L_x^r} \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}} \leq \overline{C}(n, r) \|F\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}^2 \end{aligned}$$

Le stime di Ginibre-Velo $\implies$ Tomas-Stein

- Prendiamo infatti $q = r$ nel Teorema 5. Alla luce della (1.12), da Plancherel otteniamo per ogni $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\|\widehat{T(F)}\|_{L^2_x} \leq C(n) \|F\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n+4}}(\mathbb{R}^{n+1})} \quad (1.21)$$

Le stime di Ginibre-Velo $\implies$ Tomas-Stein

- Prendiamo infatti $q = r$ nel Teorema 5. Alla luce della (1.12), da Plancherel otteniamo per ogni $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\|\widehat{T(F)}\|_{L_x^2} \leq C(n) \|F\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n+4}}(\mathbb{R}^{n+1})} \quad (1.21)$$

- D'altra parte, è facile verificare che

$$\widehat{T(F)}(\xi) = \widehat{F}(\xi, -2\pi|\xi|^2)$$

e quindi la (1.21) implica

$$\left(\int_{\Sigma_M} |\widehat{F}|^2 d\sigma \right)^{1/2} \leq C(n, M) \|F\|_{L^{\frac{2(n+2)}{n+4}}(\mathbb{R}^{n+1})}, \quad (1.22)$$

dove Σ_M è il paraboloide troncato in $\mathbb{R}^{n+1}$. **La (1.22) è equivalente al teorema di Tomas-Stein in $\mathbb{R}^{n+1}$!**

Stime di tipo Strichartz per operatori degeneri con drift

- In questa ultima parte del mio seminario accenno brevemente ai due lavori citati in apertura. In entrambi dimostriamo stime **ottimali** alla Ginibre-Velo. Poichè si tratta di lavori molto tecnici, mi limiterò a commentare alcuni aspetti generali di ognuno

Stime di tipo Strichartz per operatori degeneri con drift

- In questa ultima parte del mio seminario accenno brevemente ai due lavori citati in apertura. In entrambi dimostriamo stime **ottimali** alla Ginibre-Velo. Poichè si tratta di lavori molto tecnici, mi limiterò a commentare alcuni aspetti generali di ognuno
- Con **Federico** consideriamo il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ per equazioni di Schrödinger fortemente degeneri con **drift reale** del tipo

$$\partial_t u - i \operatorname{tr}(Q \nabla^2 u) - \langle Bx, \nabla u \rangle = F(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.23)$$

Stime di tipo Strichartz per operatori degeneri con drift

- In questa ultima parte del mio seminario accenno brevemente ai due lavori citati in apertura. In entrambi dimostriamo stime **ottimali** alla Ginibre-Velo. Poichè si tratta di lavori molto tecnici, mi limiterò a commentare alcuni aspetti generali di ognuno
- Con **Federico** consideriamo il problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ per equazioni di Schrödinger fortemente degeneri con **drift reale** del tipo

$$\partial_t u - i \operatorname{tr}(Q \nabla^2 u) - \langle Bx, \nabla u \rangle = F(x, t), \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (1.23)$$

- Con **Gigliola** studiamo il problema di Cauchy sulla semiretta $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, con **drift complesso e singolare**, e condizione di Neumann

$$\begin{cases} \partial_t u - i \left(\partial_{xx} u + \frac{a}{x} \partial_x u \right) = F(x, t), & a > -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \partial_x u(x, t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1.24)$$

- Nel problema (1.23) supponiamo $n \geq 2$, e che le matrici Q, B appartengono a $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, con $Q = Q^* \geq 0$. L'ipotesi fondamentale che vincola Q e B è la seguente:

- Nel problema (1.23) supponiamo $n \geq 2$, e che le matrici Q, B appartengono a $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, con $Q = Q^* \geq 0$. L'ipotesi fondamentale che vincola Q e B è la seguente:

$\text{Ker } Q$ non contiene alcun sottospazio invariante non banale di B^*

- Nel problema (1.23) supponiamo $n \geq 2$, e che le matrici Q, B appartengono a $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, con $Q = Q^* \geq 0$. L'ipotesi fondamentale che vincola Q e B è la seguente:

Ker Q non contiene alcun sottospazio invariante non banale di B^*

Questa è la ben nota condizione necessaria e sufficiente di Kalman per la controllabilità del sistema di ODE generato da $A = \sqrt{Q}$ e B . Essa è equivalente alla stretta positività della matrice Gramiana

$$Q(t) = \int_0^t e^{sB} Q e^{sB^*} ds$$

- Nel problema (1.23) supponiamo $n \geq 2$, e che le matrici Q, B appartengono a $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$, con $Q = Q^* \geq 0$. L'ipotesi fondamentale che vincola Q e B è la seguente:

Ker Q non contiene alcun sottospazio invariante non banale di B^*

Questa è la ben nota condizione necessaria e sufficiente di Kalman per la controllabilità del sistema di ODE generato da $A = \sqrt{Q}$ e B . Essa è equivalente alla stretta positività della matrice Gramiana

$$Q(t) = \int_0^t e^{sB} Q e^{sB^*} ds$$

- Sottolineo che il comportamento per $t \rightarrow \infty$ della funzione $V(t) = \det Q(t)$ determina interamente la dinamica del problema (1.23), e ha una funzione centrale nelle nostre stime alla Strichartz

- Questo aspetto cruciale è evidenziato dalla seguente formula risolutiva di (1.23) ¹

$$u(x, t) = \frac{(4\pi i)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{V(t)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \frac{\langle Q(t)^{-1}(e^{tB}x-y), e^{tB}x-y \rangle}{4}} \varphi(y) dy, \quad t > 0$$

¹N. Garofalo & A. Lunardi, *Schrödinger semigroups and the Hörmander hypoellipticity condition*, ArXiv:2406.04441

- Questo aspetto cruciale è evidenziato dalla seguente formula risolutiva di (1.23)¹

$$u(x, t) = \frac{(4\pi i)^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{V(t)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \frac{\langle Q(t)^{-1}(e^{tB}x-y), e^{tB}x-y \rangle}{4}} \varphi(y) dy, \quad t > 0$$

- Equazioni di Schrödinger con drift reale come la (1.23) si presentano nello studio di problemi fondamentali, quali la **soliton resolution conjecture** (risalente al celebre “esperimento” teorico di Fermi-Pasta-Ulam, 1955), dopo una trasformazione della variabile dipendente $u(x, t) = v(y, \tau)$ in **coordinate conformi**

$$(y, \tau) = \left(\frac{x}{\sqrt{2(T-t)}}, \frac{1}{2} \log \frac{1}{T-t} \right)$$

¹N. Garofalo & A. Lunardi, *Schrödinger semigroups and the Hörmander hypoellipticity condition*, ArXiv:2406.04441

- L'aspetto saliente del nostro lavoro è la trattazione di operatori fortemente degeneri, quali ad esempio quelli che governano le *quantum wires* (nanostrutture unidimensionali in cui gli elettroni sono liberi di muoversi in una direzione ma sono soggetti a confinamento nelle altre due)

- L'aspetto saliente del nostro lavoro è la trattazione di operatori fortemente degeneri, quali ad esempio quelli che governano le *quantum wires* (nanostrutture unidimensionali in cui gli elettroni sono liberi di muoversi in una direzione ma sono soggetti a confinamento nelle altre due)
- Un modello interessante è rappresentato dall'operatore fortemente degenere di H. Dym (1966)

$$\partial_t u = i\partial_{x_1 x_1} u + x_1 \partial_{x_2} u + \dots + x_{n-1} \partial_{x_n} u \quad (1.25)$$

In questo modello, le matrici Q e B sono date da:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & O_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

- Siccome $\sigma(B) = \{0\}$, B è nilpotente ($B^n = O_n$), e $B^*e_j = e_{j-1}$ per $j = 1, \dots, n$, gli unici sottospazi invarianti non banali di B^* sono

$$E_j = \text{span}\{e_1, \dots, e_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Poichè $\text{Ker } Q = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$, è chiaro che Q e B soddisfano l'ipotesi di Kalman

- Siccome $\sigma(B) = \{0\}$, B è nilpotente ($B^n = O_n$), e $B^*e_j = e_{j-1}$ per $j = 1, \dots, n$, gli unici sottospazi invarianti non banali di B^* sono

$$E_j = \text{span}\{e_1, \dots, e_j\}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Poichè $\text{Ker } Q = \text{span}\{e_2, \dots, e_n\}$, è chiaro che Q e B soddisfano l'ipotesi di Kalman

- Come corollario dei nostri risultati, otteniamo per (1.25) la seguente stima alla Strichartz **ottimale**

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left\{ \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \left(\int_{\mathbb{R}} \|F(\cdot, t)\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \right\} \quad (1.27)$$

dove q e r sono legati dalla relazione di ammissibilità

$$\frac{2}{q} = D \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right)$$

con $D = n^2$, la **dimensione omogenea** associata alle dilatazioni anisotrope

$$\delta_\lambda(x, t) = (\lambda x_1, \lambda^3 x_2, \dots, \lambda^{2n-1} x_n, \lambda^2 t).$$

- Lanconelli e Polidoro (1994) hanno dimostrato che, sotto l'ipotesi di Kalman, si può associare in modo “canonico” una **dimensione omogenea locale** $D \geq n$ tale che quando $t \rightarrow 0^+$

$$V(t) = \det Q(t) \cong t^D$$

- Lanconelli e Polidoro (1994) hanno dimostrato che, sotto l'ipotesi di Kalman, si può associare in modo “canonico” una **dimensione omogenea locale** $D \geq n$ tale che quando $t \rightarrow 0^+$

$$V(t) = \det Q(t) \cong t^D$$

- I nostri risultati mettono in luce un fatto nuovo: nelle stime dispersive, la dinamica è guidata dal comportamento per $t \rightarrow \infty$ della funzione $V(t)$. A seconda delle proprietà spettrali della matrice B del drift, tale comportamento può essere estremamente variegato e complesso ed esso divide le stime alla Strichartz in due categorie, nettamente separate dalle seguenti ipotesi:

Ipotesi (A) Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma t^D e^{t \operatorname{tr} B}$$

Ipotesi (A) Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma t^D e^{t \operatorname{tr} B}$$

Ipotesi (B) Esiste $\gamma > 0$, e un numero $2 \leq D_\infty < D$, tali che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma \min\{t^D, t^{D_\infty}\}$$

Ipotesi (A) Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma t^D e^{t \operatorname{tr} B}$$

Ipotesi (B) Esiste $\gamma > 0$, e un numero $2 \leq D_\infty < D$, tali che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma \min\{t^D, t^{D_\infty}\}$$

(a) Se vale l'ipotesi (A), allora vale il Teorema A;

Ipotesi (A) Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma t^D e^{t \operatorname{tr} B}$$

Ipotesi (B) Esiste $\gamma > 0$, e un numero $2 \leq D_\infty < D$, tali che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma \min\{t^D, t^{D_\infty}\}$$

- (a) Se vale l'ipotesi (A), allora vale il Teorema A;
- (b) Se invece vale l'ipotesi (B), allora vale il Teorema B

Ipotesi (A) Esiste $\gamma > 0$ tale che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma t^D e^{t \operatorname{tr} B}$$

Ipotesi (B) Esiste $\gamma > 0$, e un numero $2 \leq D_\infty < D$, tali che per ogni $t > 0$ vale la seguente disuguaglianza:

$$V(t) \geq \gamma \min\{t^D, t^{D_\infty}\}$$

- (a) Se vale l'ipotesi (A), allora vale il Teorema A;
- (b) Se invece vale l'ipotesi (B), allora vale il Teorema B
 - Dato $r > 2$, diremo **ammissibile** una coppia (q, r) che verifichi

$$\frac{2}{q} = D\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)$$

Se $D > 2$ assumiamo che $r < \frac{2D}{D-2}$

Theorem A. *Supponiamo che valga l'ipotesi (A), e che la coppia (q, r) sia ammissibile. Esiste $C = C(n, r) > 0$ tale che se u è soluzione di (1.23), con $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e F tale che $\|e^{\frac{\text{tr} B}{2}t} \|F(\cdot, t)\|_{L_x^{r'}}\|_{L_t^{q'}} < \infty$, allora vale la seguente stima alla Strichartz*

Theorem A. Supponiamo che valga l'ipotesi (A), e che la coppia (q, r) sia ammissibile. Esiste $C = C(n, r) > 0$ tale che se u è soluzione di (1.23), con $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e F tale che $\|e^{\frac{\text{tr } B}{2}t}\|F(\cdot, t)\|_{L_x^{r'}}\|_{L_t^{q'}} < \infty$, allora vale la seguente stima alla Strichartz

$$\left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{q \text{tr } B}{2}t} \|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left\{ \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right. \\ \left. + \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{q' \text{tr } B}{2}t} \|F(\cdot, t)\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)}^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \right\}$$

Seconda stima alla Strichartz

Theorem B. *Supponiamo che valga l'ipotesi (B) e che $r > 2$. e assumiamo che $r < \frac{2D}{D-2}$ se $D > 2$. Supponiamo inoltre che q, q_∞ soddisfino*

$$\frac{2}{q} = D \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right), \quad \frac{2}{q_\infty} \leq D_\infty \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right).$$

Allora esiste $C = C(n, r) > 0$ tale che, per ogni $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e F tale che $\|e^{\frac{\text{tr } B}{2}t}\|F(\cdot, t)\|_{L_x^{r'}}\|_{L_t^{q'} \cap L_t^{q'_\infty}} < \infty$, si abbia

$$\begin{aligned} \|e^{\frac{\text{tr } B}{2}t}\|u(\cdot, t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\|_{L_t^q + L_t^{q_\infty}} &\leq C \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \|e^{\frac{\text{tr } B}{2}t}\|F(\cdot, t)\|_{L_x^{r'}}\|_{L_t^{q'} \cap L_t^{q'_\infty}} \right\} \end{aligned}$$

Valgono sempre o l'ipotesi (A) o la (B)

Valgono sempre o l'ipotesi (A) o la (B)

Theorem 6

Supponiamo che Q e B soddisfino **una** delle seguenti ipotesi (i)-(iii):

- (i) $\sigma(B) \not\subset i\mathbb{R}$;
- (ii) $\sigma\{B\} \subset i\mathbb{R}$ e $\text{Rank}(Q) = n$;
- (iii) B è nilpotente e nella forma

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & B_r & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Allora vale **l'ipotesi (A)**

Fallimento dell' Ipotesi (A)

- La (ii) nel Teorema 6 non include il caso in cui $\sigma(B) \subset i\mathbb{R}$, ma $\text{Rank}(Q) < n$ (e quindi Q non è invertibile). In tale situazione l'Ipotesi (A) fallisce in modo significativo

Fallimento dell' Ipotesi (A)

- La (ii) nel Teorema 6 non include il caso in cui $\sigma(B) \subset i\mathbb{R}$, ma $\text{Rank}(Q) < n$ (e quindi Q non è invertibile). In tale situazione l'Ipotesi (A) fallisce in modo significativo
- Ad esempio, con un pò di conti si dimostra che per le matrici

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

con a, b e c soddisfacenti l'equazione $-bc = a^2 + \gamma^2 > 0$, si ha

$$Q(t) = \frac{t}{2} \left(C + \frac{A(t)}{t} \right)$$

per una matrice $C > 0$. Ciò prova che

$$V(t) = \gamma t^2(1 + O(t^{-1})), \quad \text{per } t \rightarrow \infty \quad (1.29)$$

- D'altra parte, un altro conto dimostra che la dimensione omogenea locale è data da $D = p_0 + 3p_1 = 4$
- In vista della (1.29) è perciò chiaro che l'Ipotesi (A) non può valere, ma invece si ha

$$V(t) \geq \gamma \min\{t^4, t^2\}$$

Perciò, tenendo a mente che $\text{tr } B = 0$, è chiaro che vale invece l'Ipotesi (B), con $D = 4$, e $D_\infty = 2$

- D'altra parte, un altro conto dimostra che la dimensione omogenea locale è data da $D = p_0 + 3p_1 = 4$
- In vista della (1.29) è perciò chiaro che l'Ipotesi (A) non può valere, ma invece si ha

$$V(t) \geq \gamma \min\{t^4, t^2\}$$

Perciò, tenendo a mente che $\text{tr } B = 0$, è chiaro che vale invece l'Ipotesi (B), con $D = 4$, e $D_\infty = 2$

- Questo esempio è paradigmatico della seguente situazione generale

- D'altra parte, un altro conto dimostra che la dimensione omogenea locale è data da $D = p_0 + 3p_1 = 4$
- In vista della (1.29) è perciò chiaro che l'Ipotesi (A) non può valere, ma invece si ha

$$V(t) \geq \gamma \min\{t^4, t^2\}$$

Perciò, tenendo a mente che $\text{tr } B = 0$, è chiaro che vale invece l'Ipotesi (B), con $D = 4$, e $D_\infty = 2$

- Questo esempio è paradigmatico della seguente situazione generale

Theorem 7

Supponiamo che $\text{Rank}(Q) < n$, e che B sia simile a una matrice skew-symmetric. Allora vale l'Ipotesi (B) holds with $D_\infty = n$.

Un modello di operatori di Schrödinger singolare con drift complesso

- In questo problema la linea di divisione è fra i valori $-1 < a < 0$ e $a \geq 0$. Quando $a \geq 0$ e il termine forzante è nonlineare $F = \mu|u|^{p-1}u$, con $\mu \in \mathbb{C}$ and $p > 1$, dimostriamo un teorema di esistenza e unicità globale nel tempo, e per dati iniziali sufficientemente piccoli, nel caso in cui il problema sia L_a^2 -critico (i.e., $p = 1 + \frac{4}{a+1}$). Se il problema è L_a^2 -sottocritico (i.e., $p < 1 + \frac{4}{a+1}$), otteniamo esistenza e unicità in un intervallo di tempo sufficientemente piccolo per ogni $\mu \in \mathbb{C}$. Quando $\mu = ib$, con $b \in \mathbb{R}$, siamo in grado di migliorare questo risultato locale in uno globale

- The starting point of our analysis is the following Duhamel's formula for solutions of (1.24). Note: $d\omega_a(x) = x^a dx$

Proposition 8

Given $\varphi \in \mathcal{S}^+$ and $F \in \mathbb{S}^+$, the solution of the Cauchy problem (1.24) admits the representation

$$u(x, t) = \int_0^\infty S_a(x, y, t) \varphi(y) d\omega_a(y) + \int_0^t \int_0^\infty S_a(x, y, t-s) F(y, s) d\omega_a(y) ds,$$

where for $x, y > 0$ we have defined

$$S_a(x, y, t) := \begin{cases} \frac{e^{i\frac{(a+1)\pi}{4}}}{(2|t|)^{\frac{a+1}{2}}} \left(\frac{xy}{2|t|}\right)^{\frac{1-a}{2}} J_{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{xy}{2|t|}\right) e^{-i\frac{x^2+y^2}{4|t|}}, & t < 0, \\ \frac{e^{-i\frac{(a+1)\pi}{4}}}{(2|t|)^{\frac{a+1}{2}}} \left(\frac{xy}{2|t|}\right)^{\frac{1-a}{2}} J_{\frac{a-1}{2}}\left(\frac{xy}{2|t|}\right) e^{i\frac{x^2+y^2}{4|t|}}, & t > 0, \end{cases}$$

where $J_\nu(z)$ denotes the Bessel function of the first kind and order ν

- **Notation:** weighted Lebesgue space of measurable functions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ such that

$$\|f\|_{L_a^r} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^r d\omega_a(x) \right)^{1/r} < \infty$$

the mixed-norm Lebesgue spaces $L_t^q L_a^r$ of measurable functions $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ such that

$$\|u\|_{L_t^q L_a^r} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_{L_a^r}^q dt \right)^{1/q} < \infty$$

- **Notation:** weighted Lebesgue space of measurable functions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ such that

$$\|f\|_{L_a^r} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^r d\omega_a(x) \right)^{1/r} < \infty$$

the mixed-norm Lebesgue spaces $L_t^q L_a^r$ of measurable functions $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ such that

$$\|u\|_{L_t^q L_a^r} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|u(\cdot, t)\|_{L_a^r}^q dt \right)^{1/q} < \infty$$

Definition 9

Let $a > -1$. Let $r > 2$, and assume furthermore that $r < \frac{2(a+1)}{a-1}$ if $a > 1$. We say that a pair (q, r) is ***a-admissible*** if

$$\frac{2}{q} = (a+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r} \right).$$

- Uno dei risultati principali è la seguente stima alla Strichartz per il problema (1.24)

Theorem 10

Let $a \geq 0$ and let the pair (q, r) be a -admissible. There exists $C(a, r) > 0$ such that for every $\varphi \in \mathbb{S}^{n-1}$ and $F \in \mathbb{S}^+$, the unique solution u of the problem (1.24), satisfies the following a priori estimate

$$\|u\|_{L_t^q L_a^r} \leq C(a, r) \left(\|\varphi\|_{L_a^2} + \|F\|_{L_t^{q'} L_a^{r'}} \right). \quad (1.30)$$