# Alcuni temi di Analisi Reale e Teoria della Misura, un secolo dopo Giuseppe Vitali

Luigi Ambrosio
luigi.ambrosio@sns.it

Scuola Normale Superiore

Modena, 9 settembre 2025

# Indice



SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Insiemi e funzioni misurabili, 1904-1905

Nella nota (*Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*) introduce una nozione di misurabilità per sottoinsiemi $A$ di un intervallo $I$ limitato, basata sulla disuguaglianza

$$\mathscr{L}^*(A) + \mathscr{L}^*(I \setminus A) = \mathscr{L}^*(I) \quad \text{con } \mathscr{L}^* \text{ misura esterna.}$$

In spazi astratti è meno restrittiva della nozione introdotta successivamente da Carathéodory negli anni '20 (si prende $X = \{1, 2, 3\}$ con $\lambda(X) = 2$, $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(A) = 1$ per tutti gli altri insiemi $A$, sicché tutti i sottoinsiemi di $X$ risultano misurabili) ma ha comunque le stesse buone proprietà di stabilità insiemistica.

In una nota successiva (*Atti Accad. Naz. Lincei*) mostra che le funzioni di Borel sono funzioni di Baire (quindi generabili a partire da funzioni continue), l'implicazione inversa era stata dimostrata poco prima da Lebesgue.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Caratterizzazione funzioni Riemann-integrabili e Lebesgue integrabili, 1903-1924

Nella nota del 1903 (*Bollettino Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania*) compare la famosa caratterizzazione delle funzioni Riemann-integrabili in termini dell'insieme $\Sigma$ dei suoi punti di discontinuità (precisamente, si afferma che ogni suo sottoinsieme $C$ chiuso deve essere "rinchiudibile").

Poi perfezionato nel 1904 (*Rendiconti Ist. Lombardo sc. e lett.*) in termini di quella che oggi chiameremmo misura esterna.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Caratterizzazione funzioni Riemann-integrabili e Lebesgue integrabili, 1903/1924

Ritorna poi nel 1924 sul tema (*Annali Mat. Pura e Applicata*), quando ormai la teoria dell'integrazione di Lebesgue era consolidata, per mostrare attraverso le formule (per semplicità $f \geq 0$)

$$\int^{*} f(x)\,dx = \int_0^\infty \mathscr{L}^*(\{f > t\})\,dt, \quad \int_{*} f(x)\,dx = \int_0^\infty \mathscr{L}_*(\{f > t\})\,dt$$

che la definizione di integrabilità proposta da Beppo Levi implica la misurabilità di $f$ e quindi non può essere più generale di quella di Lebesgue.

# Teorema di Lusin, 1905

In questa nota (*Rendiconti Ist. Lombardo Scienza e Lettere*), il teorema è enunciato in questo modo:

ogni funzione di Borel è equivalente a una nella seconda classe di Baire

La costruzione passa attraverso quella che è ora la forma più popolare del teorema, ossia che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $K \subseteq \Omega$ compatto, con $\mathscr{L}^1(\Omega \setminus K) < \epsilon$, tale che $f|_K$ è continua.

La costruzione ricorda in qualche modo anche il cosiddetto teorema di Egorov che, al prezzo della rimozione di un insieme di misura arbitrariamente piccola nel dominio, consente di migliorare la convergenza, da puntuale a uniforme.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Insieme non misurabile secondo Lebesgue, 1905

In una breve nota di meno di 3 pagine, mostra con tale insieme che gli assiomi:

- Invarianza per traslazioni
- Misura dell'intervallo $[0, 1]$ finita e positiva
- Numerabile additività

non sono compatibili, se si vuole assegnare una misura a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

# Funzioni assolutamente continue e funzioni integrali, 1905

In questa nota (*Atti Accademia delle Scienze di Torino*) è dimostrata, per $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, l'equivalenza tra la proprietà di assoluta continuità, espressa nella forma

(AC)

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \sum_i (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$$

e la proprietà di essere una funzione integrale, ovvero

(Int)

$$f(x) = c + \int_a^x g(y)\, dy \quad \text{per opportuni } g \in L^1(a, b) \text{ e } c \in \mathbb{R}.$$

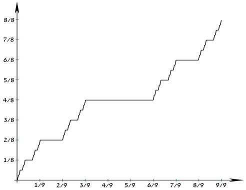
Lebesgue aveva già dimostrato la derivabilità quasi ovunque delle funzioni integrali, il che rende la $g$, così come la costante $c$, univocamente determinata, mentre l'implicazione da (Int) a (AC) segue facilmente dall'assoluta continuità dell'integrale.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Funzioni assolutamente continue e funzioni integrali, 1905

Tuttavia, l'implicazione da $(\mathrm{AC})$ a $(\mathrm{Int})$ è ardua, se si pensa che non erano disponibili gli strumenti di teoria della misura (teorema di Radon-Nikodym) che oggi vengono comunemente usati per dimostrarla. Viene ottenuta attraverso la riduzione al caso monotono e un *constancy theorem* basato sui numeri derivati.

È in questa nota che compare la prima costruzione di una funzione continua, monotona, quasi ovunque localmente costante (quindi con derivata nulla), ma non costante (quindi a variazione limitata, ma *non* assolutamente continua).




Oggi la più popolare è nota come funzione di Cantor-Vitali (o devil's staircase).

# Integrazione per serie, 1907

Nella nota (*Rend. Circolo Matematico di Palermo*) dedicata al problema del passaggio al limite nell'integrazione per serie, formula un principio di equivalenza tra equi-assoluta continuità e convergenza puntuale di funzioni di insieme $E \mapsto \int_E f_h \, dx$ con $E$ Borel.

Dopo le generalizzazioni successive degli anni 20-30, nell'ambito della teoria generale della misura, è noto oggi come teorema di Vitali-Hahn-Saks.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Teoremi di ricoprimento, 1908

Riporto l'enunciato base della nota (*Atti Accademia delle Scienze di Torino*) in forma testuale:

*se* $\Sigma$ *è un gruppo di segmenti il cui nucleo abbia una misura finita* $m_1$*, esiste un gruppo finito o numerabile di segmenti di* $\Sigma$ *a due a due disgiunti, le cui lunghezze hanno una somma non minore di* $m_1$*.*

Vitali è ben consapevole che il risultato si estende a più variabili e a diverse geometrie (ad esempio cubi anziché palle). Usa questo risultato per dimostrare la derivabilità quasi ovunque delle funzioni a variazione limitata. In seguito Banach lo estenderà al caso di ricoprimenti con famiglie "controllate" di insiemi, non necessariamente palle rispetto a una distanza.

Curiosamente, manca nell'enunciato l'informazione più forte (che però emerge dalla costruzione) che l'unione di tali segmenti contiene il nucleo, informazione che risulta fondamentale in molte delle future applicazioni dei "Vitali covering theorems".

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Teoremi di ricoprimento, 1908

La dimostrazione passa attaverso uno schema iterativo basato su un enunciato intermedio, che qui riporto in forma moderna:

**Teorema**

*Se $\mathcal{B}$ è un numero finito di palle aperte di $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$, esiste una sottofamiglia disgiunta $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che*

$$\mathscr{L}^d\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{B}'} B\Big) \geq 3^{-d}\mathscr{L}^d\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B\Big).$$

Anche qui ho omesso l'informazione, pure essenziale in sviluppi futuri, che l'unione delle palle $B_{3\rho}(x)$ al variare di $B_\rho(x)$ in $\mathcal{B}'$ contiene l'unione delle palle di $\mathcal{B}$. Tuttavia è in questa forma che molti studi sono stati dedicati a trovare la costante ottimale $\xi_d$, ad esempio nel caso dei cubi: per $d = 1$ si sa che $\xi_1 = 1/2$ (Radó, 1928), per $d = 2$ si sa che $\xi_2 < 1/4$ (Ajtai, 1973), in ogni caso

$$2^{-d} \geq \xi_d > \frac{1}{3^d - 7^{-d}} \quad \text{per ogni } d \geq 2, \text{ Rado, 1949.}$$

# Rettificazione delle curve, 1922

In questa breve nota (*Bollettino UMI*) si tratta la questione del calcolo, mediante integrazione, della lunghezza $\ell(\gamma)$ di una curva rettificabile $\gamma$ (lunghezza definita con il sup della lunghezza delle poligonali inscritte). La si ottiene mediante riparametrizzazione con la lunghezza d'arco, ottenendo la formula integrale

$$\ell(\gamma) = \int |\dot{\eta}(t)| \, dt$$

dove $\eta$ è la curva parametrizzata con regolarità assolutamente continua (persino Lipschitz).

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Decomposizione additiva delle funzioni a variazione finita, 1922-1923

Vitali si dimostra molto interessato ad analizzare più in profondità il gap tra variazione finita e assoluta continuità, gap che ha mostrato esistere persino per funzioni continue. In due note del 1922 e 1923 (*Rend. Circ. Mat. Palermo*) ottiene la famosa decomposizione di $f$ in tre parti

$$f = f^a + f^j + f^c$$

con $f^a(t)$ assolutamente continua, $f^j(t)$ funzione di soli salti (esprimibile quindi nella forma $f^j(t) = \sum_{z \in J, z<t} a_z$, con $J$ finito o numerabile) e $f^c$ "Cantoriana", quindi continua, ma non assolutamente continua.

In questa nota emerge decisamente tutto il suo virtuosismo nelle decomposizioni in intervalli, nell'obiettivo di caratterizzare (in assenza degli strumenti moderni di teoria della misura) le zone di "crescita infinita" di $f$, non solo corrispondenti alle discontinuità a salto, e le loro proprietà.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Decomposizione additiva delle funzioni a variazione finita, 1922-1923

Introduce quindi, per $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a variazione finita, il concetto di *scarto*

$$\mathrm{sc}(f; (c, d)) := \sup\Big\{z : \quad \forall \epsilon > 0\, \exists P \subseteq (c, d) \text{ tale che } \mathscr{L}^1(P) < \epsilon \text{ e } \mathrm{osc}(f, P) > z\Big\}$$

(con $P$ pluriintervallo) e mostra, tra le altre cose, che lo scarto è una funzione additiva dell'intervallo $(c, d) \subseteq (a, b)$.

In termini moderni riconosciamo in questi risultati la misura parte singolare della derivata $Df$ di $f$ nel senso delle distribuzioni, che oggi comunemente si ottiene usando la decomposizione di Radon-Nikodym.

Rimuovendo poi i contributi dovuti alle discontinuità si ottiene la parte "Cantoriana".

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# La formula di coarea, 1925

In "Sulle funzioni continue" (*Fundamenta Mathematicae, 1925*) Vitali mostra che, per una funzione continua $f : (a,b) \to (c,d)$ vale

$$\mathrm{Var}_{(a,b)}(f) = \sum_{r=1}^{\infty} r\mathscr{L}^1(G_r) \quad \text{con} \quad G_r = \{t \in (c,d) : \mathrm{card}(f^{-1}(t)) = r\}.$$

È molto interessante (e in qualche modo ispirato dalla stessa teoria dell'integrazione di Lebesgue) questo spostamento di interesse dal dominio al codominio. Se, usando anche il principio di Cavalieri, riscriviamo la formula di Vitali nel seguente modo

$$\mathrm{Var}_{(a,b)}(f) = \int_c^d \mathrm{card}(\partial\{f > t\})\, dt$$

otteniamo la versione unidimensionale della famosa formula Fleming-Rishel per funzioni $BV$ in domini $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

$$|Df|(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Per}\big(\{f > t\}, \Omega\big)\, dt$$

che estende dal caso Lipschitz al caso $BV$ quella di Federer.

# Alcuni temi moderni di Analisi Reale e Teoria della Misura

Vediamo ora alcuni sviluppi più recenti di questi temi, ancora moderni e ancora ben radicati nella teoria classica fondata da Vitali.

# Funzioni assolutamente continue a valori in spazi metrici

Sia $(E, d)$ metrico. La definizione $\epsilon - \delta$ di Vitali continua ad aver senso, *mutatis mutandis*:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \sum_i (b_i - a_i) < \delta \ \Rightarrow \ \sum_i d(\gamma(b_i), \gamma(a_i)) < \epsilon.$$

Risulta inoltre equivalente a (una implicazione segue subito come sempre dall'assoluta continuità della funzione integrale)

$$d(\gamma(x), \gamma(y)) \leq \int_x^y g(s)\, ds \quad \text{per una certa funzione } g \in L^1(I).$$

Ma cosa possiamo dire sul caso di uguaglianza?

Esiste una $g$ "canonica"?

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# La derivata metrica

**Teorema (A., 1990)**

*Per ogni $\gamma \in AC(I;E)$, per $\mathscr{L}^1$-quasi ogni $t \in I$, esiste la derivata metrica*

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(\gamma(t+h),\gamma(t))}{|h|} := |\dot{\gamma}|(t)$$

*ed è la minima (a meno di insiemi nulli) funzione $g$ ammissibile nella disuguaglianza.*

**Traccia.** L'enunciato è invariante per isometrie. Ci si riduce al caso separabile e, fissati $\bar{x} \in E$ e una successione densa $(x_n) \subset E$, si usa il famoso embedding isometrico $J : E \to \ell_\infty$ di Kuratowski

$$J(x) := \big(d(x,x_0)-d(\bar{x},x_0), d(x,x_1)-d(\bar{x},x_1), d(x,x_2)-d(\bar{x},x_2), \ldots\big)$$

per ridursi ulteriormente al caso in cui $J\circ\gamma(I) \subseteq \ell_\infty$. Si ragiona poi sulle componenti di $J\circ\gamma$, che sono funzioni AC "classiche".

La derivata metrica è uno degli ingredienti importanti, oggi, del calcolo differenziale in spazi metrici.

# L'importanza dei numeri derivati

La teoria dei problemi di evoluzione del tipo flusso gradiente $x'(t) = -\nabla F(x(t))$, $t \geq 0$, è stata molto studiata negli ultimi decenni, con diverse formulazioni che consentono di trattare spazi ambiente e funzionali $F$ anche non lisci (Brezis, Ekeland, De Giorgi,....).

Nell'ambito di questa teoria, per funzioni convesse e semicontinue inferiormente $F : E \to \mathbb{R}$, con $(E, d)$ metrico, una nozione molto feconda di flusso gradiente (A-Gigli-Savaré) è:

$$\text{(EVI)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{1}{2}d^2(x(t), y) \leq F(y) - F(x(t)) \qquad \forall y \in E.$$

Come mostrare l'unicità delle soluzioni per il problema di Cauchy?

Lo schema formale (ispirato da Kruzkhov, nella teoria delle leggi di conservazione) è il seguente: se $x_1(t)$, $x_2(t)$ sono soluzioni con lo stesso dato iniziale, si applica (EVI) a $x_1(t)$ con $y = x_2(t)$ e (EVI) a $x_2(t)$ con $y = x_1(t)$, sommando, per ottenere

# L'importanza dei numeri derivati

$$\frac{d}{ds}\frac{1}{2}d^2(x_1(s),x_2(t))\Big|_{s=t} + \frac{d}{ds}\frac{1}{2}d^2(x_2(s),x_1(t))\Big|_{s=t}$$

$$\leq [F(x_2(t)) - F(x_1(t))] + [F(x_1(t)) - F(x_2(t))] = 0.$$

Potendo applicare una qualche forma della formula Leibniz di derivazione del prodotto, dedurremmo che $t \mapsto d^2(x_1(t), x_2(t))$ è non crescente, quindi identicamente nulla.

Tuttavia, non ovunque le derivate esistono in $(\mathrm{EVI})$ ed è solo trasformando la questione con i numeri derivati, che sono puntualmente definiti, che si risolve il problema.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Funzioni assolutamente continue in più variabili e spazi di Sobolev

Vi sono stati diversi tentativi di estendere la nozione di assoluta continuità, o di $AC^p(\mathbb{R})$ (funzioni AC la cui derivata, eventualmente metrica, è in $L^p$) a funzioni di $d > 1$ variabili. Tra i vari, un approccio molto interessante è stato investigato da Jan Malý (un'altra definizione, con un controllo di tipo integrale dell'oscillazione, era stata proposta da Rado-Reichilderferder):

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \sum_i \mathscr{L}^d(B_i) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_i \bigl(\mathrm{osc}_{B_i}(f)\bigr)^d < \epsilon$$

per famiglie $\{B_i\}$ di palle disgiunte.

Una semplice variante di questa definizione produce anche il concetto di funzione con $d$-variazione limitata. Le funzioni $d$-assolutamente continue $AC^d(\mathbb{R}^d)$ nel senso di Malý costituiscono uno spazio "limite" vicino a $H^{1,d}(\mathbb{R}^d)$:

$$H^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subseteq AC^d(\mathbb{R}^d) \subseteq H^{1,d}(\mathbb{R}^d) \qquad \forall p > d.$$

# Gli spazi di Sobolev

Tuttavia, penso che la maggior parte degli esperti ora concordi che la trasposizione più fedele di $AC^p(\mathbb{R})$ a più dimensioni è data dagli spazi di Sobolev $H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, dove (come nel caso monodimensionale) l'esponente di sommabilità $p$ è disaccoppiato dalla dimensione $d$.

Possiamo definire tali spazi mediante:
**(Approssimazione)** $f \in H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e esistono funzioni lisce $f_h$ convergenti a $f$ in $L^p(\mathbb{R}^p)$ tali che

$$\limsup_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f_h|^p \, dx < \infty.$$

**(Integrazione per parti)** $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ se $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ed esiste $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ tale che

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \nabla \phi \, dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \phi \nabla f \, dx \qquad \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Meyers-Serrin (1960), "$H = W$" anche in domini generali $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, per convoluzione e partizioni dell'unità.

# L'approccio di Beppo Levi, 1906

B. Levi, *Sul principio di Dirichlet*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1906.
$f$ appartiene a $BL^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ se $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, dx < \infty$ e, per ogni $i \in \{1, \ldots, d\}$, vale:

(i) per $\mathscr{L}^{d-1}$-q.o. $x_i' \in \mathbb{R}^{d-1}$ la funzione $x_i \mapsto f(x_i, x_i')$ è localmente assolutamente continua in $\mathbb{R}$;
(ii) $\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |\frac{d}{dx_i} f(x_i, x_i')|^p \, dx_i dx_i' < \infty$.
Tuttavia, la definizione non venne troppo apprezzata per alcune difficoltà tecniche, in quegli anni difficilmente superabili:

- invarianza rispetto a cambiamenti di coordinate;
- la necessità di postulare un rappresentante "preciso" nella classe di equivalenza di Lebesgue.

**Teorema**

*$BL^{1,p}(\mathbb{R}^d) \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Viceversa, se $f \in H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ allora esiste $\tilde{f} \in BL^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ $\mathscr{L}^d$-q.o. coincidente con $f$.*

A posteriori, i tre spazi coincidono.

# Spazi di Sobolev in spazi metrici di misura

Nella moderna teoria degli spazi di Sobolev (e $BV$) in spazi metrici di misura $(X, d, \mu)$, le funzioni assolutamente continue (e $BV$) di variabile reale e il punto di vista di Levi hanno recuperato un ruolo centrale.

È possibile mostrare che tutte e tre le definizioni possono essere riprodotte in questo ambito generale, e producono lo stesso spazio, persino con lo stesso modulo del gradiente![1]

Per semplicità illustro solo il punto di vista di Levi, come rivisitato già in ambito Euclideo da Bent Fuglede, e quello dell'approssimazione con funzioni regolari, dovuto a Jeff Cheeger, omettendo quello delle distribuzioni e delle integrazioni per parti che richiedono un formalismo più astratto (Weaver, Gigli, Di Marino).

[1] A-Gigli-Savaré, *Density of Lipschitz functions and equivalence of weak gradients in metric measure spaces, RMI, 2013*

# Una nozione coordinate-free di "quasi ogni curva"

Consideriamo, nello spazio metrico $(X, d)$, la classe $\Gamma(X)$ delle curve continue $\gamma$, non costanti e di lunghezza finita (modulo una riparametrizzazione, possono essere pensate Lipschitz).

Diremo che una funzione di Borel non negativa $\rho : X \to [0, \infty]$ è ammissibile per $\Gamma \subseteq \Gamma(X)$ se

$$\int_\gamma \rho \geq 1 \qquad \forall \gamma \in \Gamma.$$

L'integrale curvilineo può essere definito, ad esempio, parametrizzando in modo AC e usando la derivata metrica: $\int_0^1 \rho(\gamma(t))|\dot{\gamma}|(t)\, dt$.

Per $p > 1$, definiamo allora (Ahlfors, Beurling, Fuglede)

$$\mathrm{Mod}_p(\Gamma) := \inf\left\{\|\rho\|_{L^p(\mu)} : \ \rho \text{ è ammissibile per } \Gamma\right\}$$

e usiamo questa funzione d'insieme (che poi risulta essere una capacità nel senso di Choquet) per dire che una certa proprietà vale per $\mathrm{Mod}_p$-quasi ogni curva.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Lo spazio $BL^{1,p}(X,d,\mu)$

Diremo quindi che una funzione di Borel $f : X \to \mathbb{R}$ è nello spazio $BL^{1,p}(X,d,\mu)$ se esiste una funzione di Borel $g : X \to [0,\infty)$ con $\int_X g^p \, d\mu < \infty$ tale che

$$|f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| \le \int_\gamma g \qquad \text{per } \mathrm{Mod}_p\text{-quasi ogni } \gamma \in \Gamma(X).$$

Questa definizione è la più essenziale, e poi ha come conseguenza che $f \circ \gamma$ è assolutamente continua per $\mathrm{Mod}_p$-quasi ogni $\gamma$. Fuglede (*Acta Math.*, 1957) mostra in $\mathbb{R}^d$ che per $p > 1$ questa definizione produce gli spazi $H^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ e $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$, inoltre la minima possibile $g$ è proprio $|\nabla f|$.

Si noti la buona separazione dei ruoli tra la distanza $d$ e la misura $\mu$: la distanza entra nella nozione di $p$-ammissibilità, la misura nel processo di minimizzazione che definisce $\mathrm{Mod}_p(\Gamma)$.

Questo non avviene con la definizione di spazio di Sobolev $H^{1,p}(X,d,\mu)$, pure fondamentale, data per approssimazione.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE

# Lo spazio $H^{1,p}(X, d, \mu)$

Data $f : X \to \mathbb{R}$, definiamo pendenza di $f$ in $x$ la funzione

$$|\nabla f|(x) := \limsup_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{d(y, x)} \quad \text{(posta a 0 nei punti } x \text{ isolati).}$$

Diremo allora che $f \in L^p(X, \mu)$ appartiene a $H^{1,p}(X, d, \mu)$ se esistono funzioni $f_h$ Lipschitziane sui limitati tali che $f_h \to f$ in $L^p(X, \mu)$ e

$$\limsup_{h \to \infty} \int_X |\nabla f_h|^p \, d\mu < \infty.$$

Per ottenere il "modulo del gradiente" Cheeger (*GAFA*, 1999) definisce *pendenza rilassata* ogni punto limite di $|\nabla f_h|$ nella topologia debole di $L^p(X, \mu)$.

Si definisce poi $|Df|_*$ l'elemento di minima norma $L^p$ dell'insieme delle pendenze rilassate, che è un convesso chiuso.

# Lo spazio $H^{1,p}(X, d, \mu)$

Con queste semplici definizioni, un calcolo differenziale di base può essere sviluppato:

**(chain rule)** $|\nabla\phi(f)|_* \leq |\phi'(f)||\nabla f|_*$, con uguaglianza se $\phi' \geq 0$;

**(minimalità puntuale)** $|\nabla f|_* \leq h$ $\mu$-q.o. in $X$ per ogni pendenza rilassata $h$ di $f$.

**(località forte)** $|\nabla f|_* = |\nabla g|_*$ $\mu$-q.o. in $\{f = g\}$.

Andando oltre, si definisce poi l'energia "di Dirichlet"

$$\mathrm{Ch}(f) := \int_X |\nabla f|_*^p \, d\mu$$

e con essa una nozione di Laplaciano $\Delta_p$, che può essere non lineare persino nel caso $p = 2$.

# Lo spazio $H^{1,p}(X, d, \mu)$

**Teorema**

*$H^{1,p}(X, d, \mu) = BL^{1,p}(X, d, \mu)$ per ogni $p > 1$ ed ogni misura $\mu$ finita sui limitati. Inoltre, per ogni $f \in BL^{1,p}(X, d, \mu)$, $|Df|_*$ è la minima $g$ ammissibile.*

La dimostrazione dell'implicazione "difficile" $BL \subseteq H$ richiede vari strumenti (regolarizzazione mediante $\Delta_p$, trasporto ottimo, principio di sovrapposizione) ma proprio per legare il punto di vista "Euleriano" degli spazi $H$ a quello "Lagrangiano" degli spazi $BL$ la teoria delle curve assolutamente continue, di cui Vitali è stato pioniere, vi gioca un ruolo fondamentale.